Wstęp do
teorii niepewności pomiaru

Danuta J. Michczyńska
Adam Michczyński

Podstawowe informacje:

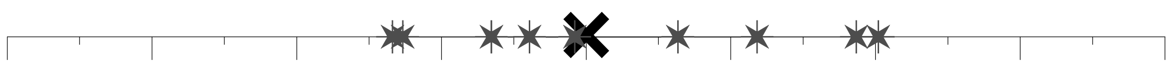
- Strona Politechniki Śląskiej: www.polsl.pl
- Instytut Fizyki / strona własna Instytutu / Dydaktyka / I Pracownia Fizyczna A w Gliwicach
  - FORMULARZE
    - **STRONA TYTUŁOWA**
    - **KARTA POMIAROWA**
  - SPIS ĆWICZEŃ
    - Instrukcje do pobrania poprzez Platformę Zdalnej Edukacji
      - » Zaloguj się jako gość
      - » Pierwsza pracownia fizyczna

Pomiary fizyczne

- Są dokonywane tylko ze skończoną dokładnością.
  - Powodem - niedoskonałość przyrządów pomiarowych i nieprecyzyjność naszych zmysłów biorących udział w obserwacjach.
- Podawanie samego tylko wyniku pomiaru – niewystarczające
- Opracowanie pomiarów winno zawierać także miarę ich wiarygodności, czyli niepewność pomiaru.

Rodzaje błędów pomiaru

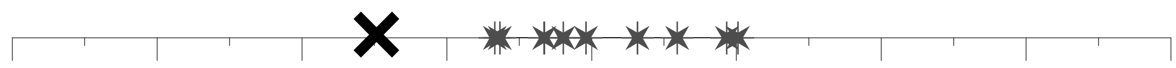
- **Błąd przypadkowy** spowodowany jest losowym odchyleniem wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej. Wynik kolejnego pomiaru jest inny, lecz szansa uzyskania wyników tak większych, jak i mniejszych od wartości rzeczywistej jest w przybliżeniu taka sama.



Rys. 1. *Losowy rozrzut wyników pomiarów wokół wartości rzeczywistej ilustrujący występowanie błędu przypadkowego.*

Rodzaje błędów pomiaru

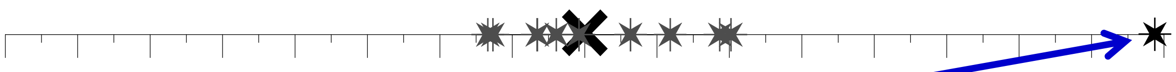
- Z **błędem systematycznym** mamy do czynienia, gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica między wynikami pomiarów a wartością rzeczywistą, natomiast rozrzut wyników poszczególnych pomiarów jest niewielki lub nie występuje w ogóle.



Rys. 2. *Błąd systematyczny.*

Rodzaje błędów pomiaru

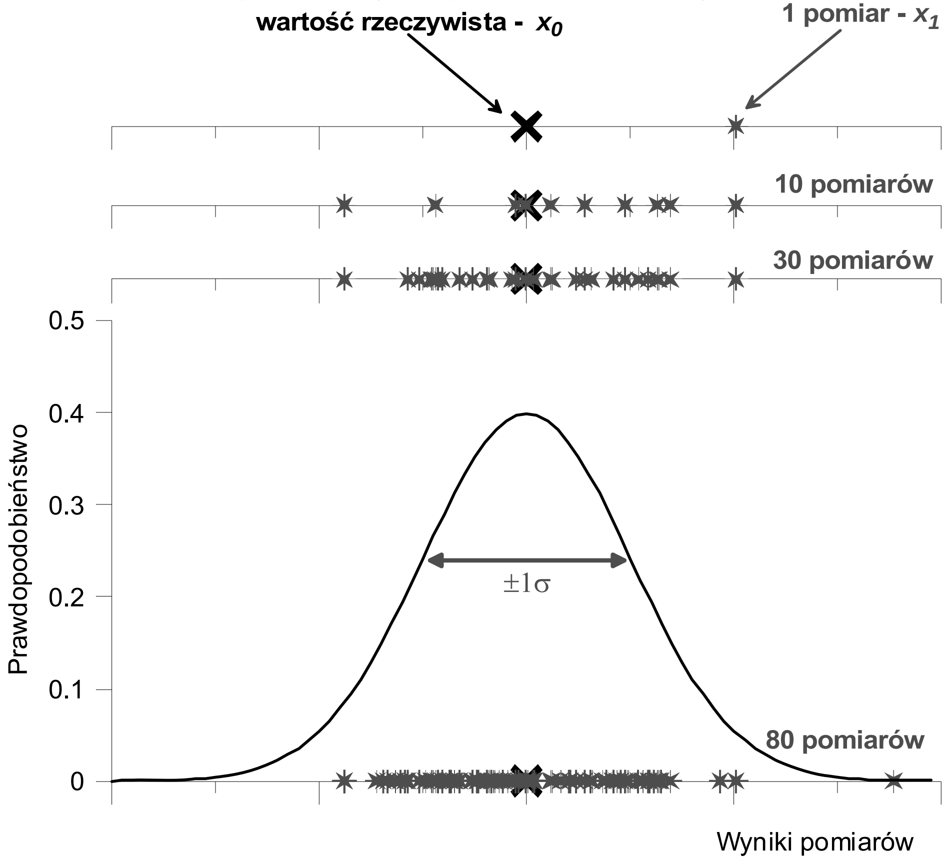
- **Błąd gruby** to różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą, na ogół bardzo duża, powstała wskutek nieumiejętności użycia danego przyrządu, pomyłek przy odczytywaniu i zapisie wyników, itp.



Rys. 3. *Błąd gruby.*

Błąd pomiaru

- ***Błąd = $x_i - x_0$***
- Błąd – to różnica pomiędzy wartością zmierzoną i rzeczywistą



Rys. 4. ***Rozrzut wyników pomiarów x_i wokół wartości rzeczywistej x_0.***

Niepewność pomiaru

- parametr związany z rezultatem pomiaru,
- charakteryzujący rozrzut wyników,
- można go, w uzasadniony sposób przypisać, wartości mierzonej.

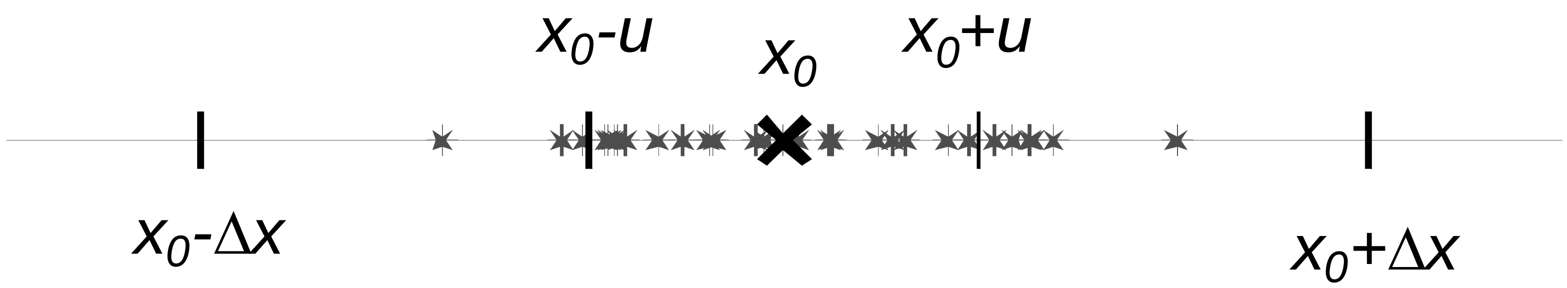
Różne miary niepewności

- **Niepewność maksymalna Δx** – staramy się określić przedział, w którym mieszczą się wszystkie wyniki pomiaru x_i, aktualnie wykonane i przyszłe.

  Niepewność maksymalna jest miarą deterministyczną, gdyż twierdzimy, że wartość prawdziwa zawarta jest <u>na pewno</u> w przedziale $x_0 \pm \Delta x$.
  Niepewność maksymalna jest stosowana w określonych sytuacjach, np. jako miara dokładności elektrycznych przyrządów pomiarowych.

- **Niepewność standardowa u(x)** – oszacowanie odchylenia standardowego
  - Rezultat pomiaru to zmienna losowa
  - Jej rozrzut charakteryzuje odchylenie standardowe - pierwiastek z średniej wartości kwadratu różnicy wartości zmierzonej i rzeczywistej
  - Nie znamy wartości rzeczywistej -> nie znamy dokładnej wartości odchylenia standardowego

Różne miary niepewności



- ***Rys. 5.*** *Porównanie przedziałów niepewności pomiaru określonych przy pomocy modelu statystycznego (x_0-u;x_0+u) i deterministycznej teorii niepewności maksymalnej (x_0-Δx;x_0+Δx).*

Niepewność typu A

- Wyznaczanie niepewności w oparciu o serię wyników pomiarów, przy których występuje rozrzut statystyczny nazywany jest obliczaniem niepewności metodą A.
  - Wynik pomiarów określamy jako wartość średnią z serii pomiarów.
  - Niepewność standardową pomiaru (wyznaczenia wartości średniej) określamy podając wartość odchylenia standardowego wartości średniej.

Niepewność typu A

- **Średnia arytmetyczna:**
  - **Wartość średnia** - estymator wartości oczekiwanej:

$$x_{sr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{sr}\right)^2}{n-1}}$$

  - **Odchylenie standardowe wartości średniej**:

$$s_{xsr} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{sr}\right)^2}{n(n-1)}}$$

Niepewność typu A

- **Średnia ważona:**
  - Poszczególnym wynikom pomiarów przypisujemy wagi w_i równe kwadratowi odwrotności ich niepewności:

$$w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}$$

  - Średnia ważona:

$$x_{srw} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

  - Niepewność średniej ważonej:

$$u(x_{srw}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u^2(x_i)}}}$$

Niepewność typu B

A co w przypadku, gdy nie występuje statystyczny rozrzut wyników (wszystkie pomiary dają ten sam wynik)?

- Główną przyczyną niepewności pomiaru jest niepewność przyrządu pomiarowego (niepewność wzorcowania).
- Przyrząd pomiarowy powinien gwarantować taką dokładność, aby wynik pomiaru x_i różnił się od wartości rzeczywistej nie więcej niż o działkę elementarną - $\Delta_p x$, czyli odstęp sąsiadujących kresek podziałki (termometr, linijka).
- Dokładność przyrządów określona przez producenta np.
  - dla mierników elektromagnetycznych

$$\Delta_P x = \frac{C \cdot zakres}{100}$$

C – klasa

Niepewność typu B

- Tak określona dokładność jest równoznaczna pojęciu niepewności maksymalnej.
- Niepewność będzie określona wzorem:

$$u(x) = \frac{\Delta_p x}{\sqrt{3}}$$

Niepewność całkowita

- Niepewność całkowitą wyznaczamy uwzględniając wszystkie czynniki określające niepewność tzn. niepewność wynikającą z rozrzutu statystycznego wyników pomiarów, niepewność przyrządu pomiarowego a także niepewność eksperymentatora.
- Najczęściej mamy jednak do czynienia z dwoma pierwszymi czynnikami. Niepewność całkowitą wyliczamy w oparciu o prawo dodawania dyspersji (wariancji).
- Dla zmiennych losowych niezależnych:
- $$u_c(x) = \sqrt{[u_A(x)]^2 + [u_B(x)]^2}$$
- $u_c(x)$ – niepewność całkowita,
- $u_A(x)$ – niepewność obliczona z rozrzutu statystycznego serii wyników pomiarów,
- $u_B(x)$ – niepewność obliczona inną drogą niż z rozrzutu wyników (w powyższym przypadku na podstawie dokładności przyrządu pomiarowego)

Prawo przenoszenia niepewności

- Wiele wielkości fizycznych jest wyznaczanych metodą pomiarów pośrednich.
- **Funkcja jednej zmiennej:**
  – Niepewność *u*(*x*) jest mała w porównaniu z wartością mierzoną *x*

$$y = f(x)$$

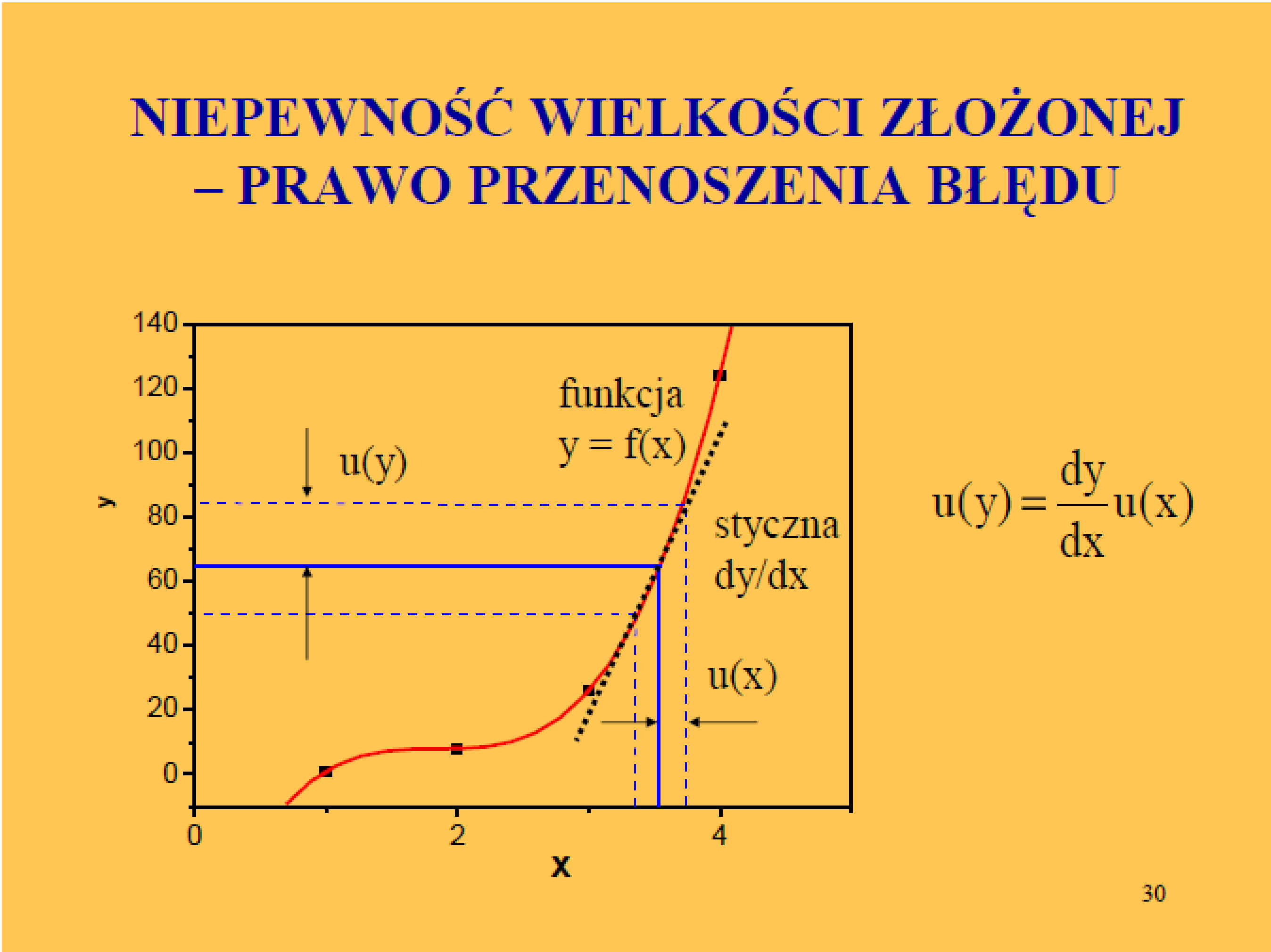
$$u(y) = \frac{dy}{dx} u(x)$$

- **Funkcja wielu zmiennych:**
-

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_k)$$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_i \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2}$$

Prawo przenoszenia niepewności



http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

Zapis wyniku końcowego

1. Niepewność podajemy z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, np.:

   $u(g) = 0{,}0287532\ m/s^2 \rightarrow u(g) = 0{,}029\ m/s^2$

2. Wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego, co niepewność, np.:

   $g = 9{,}8662317\ m/s^2 \rightarrow g = 9{,}866\ m/s^2$

3. Zapisujemy wynik końcowy wraz z niepewnością i jednostką, np:

   $g = 9{,}866\ m/s^2$; $u(g) = 0{,}029\ m/s^2$

   lub

   $\underline{g = 9{,}866(29)\ m/s^2}$

- Porównujemy otrzymany wynik z wartością tablicową - czy w granicach pojedynczej (podwojonej/potrojonej) niepewności wynik jest zgodny z wartością tablicową?

Wykresy

Przy rysowaniu wykresów należy stosować się do kilku zasad:

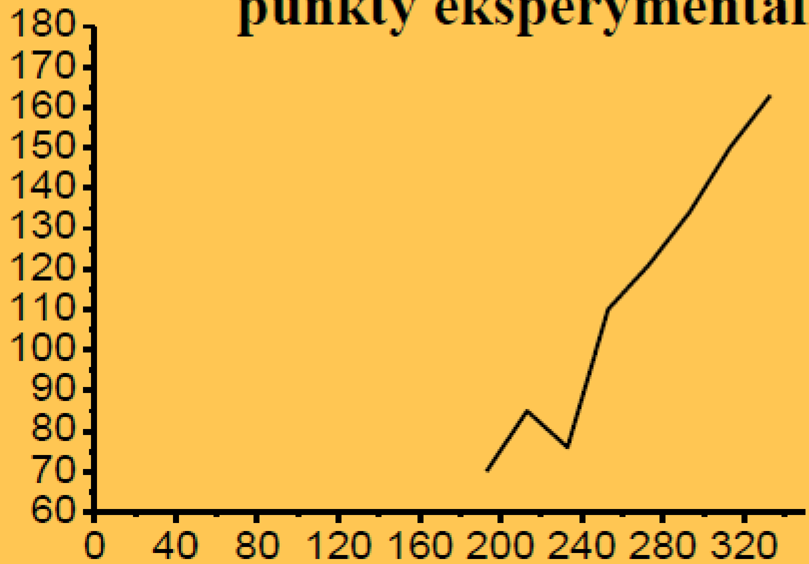
- Wykres powinien być możliwie duży (co najmniej połowa kartki A4)
- Wykresy sporządzamy przy użyciu komputera
- Ponadto:

Wykresy

Zasady rysowania wykresów

Czy ten wykres jest narysowany zgodnie z zasadami?

1. Należy wyraźnie zaznaczyć punkty eksperymentalne !!!



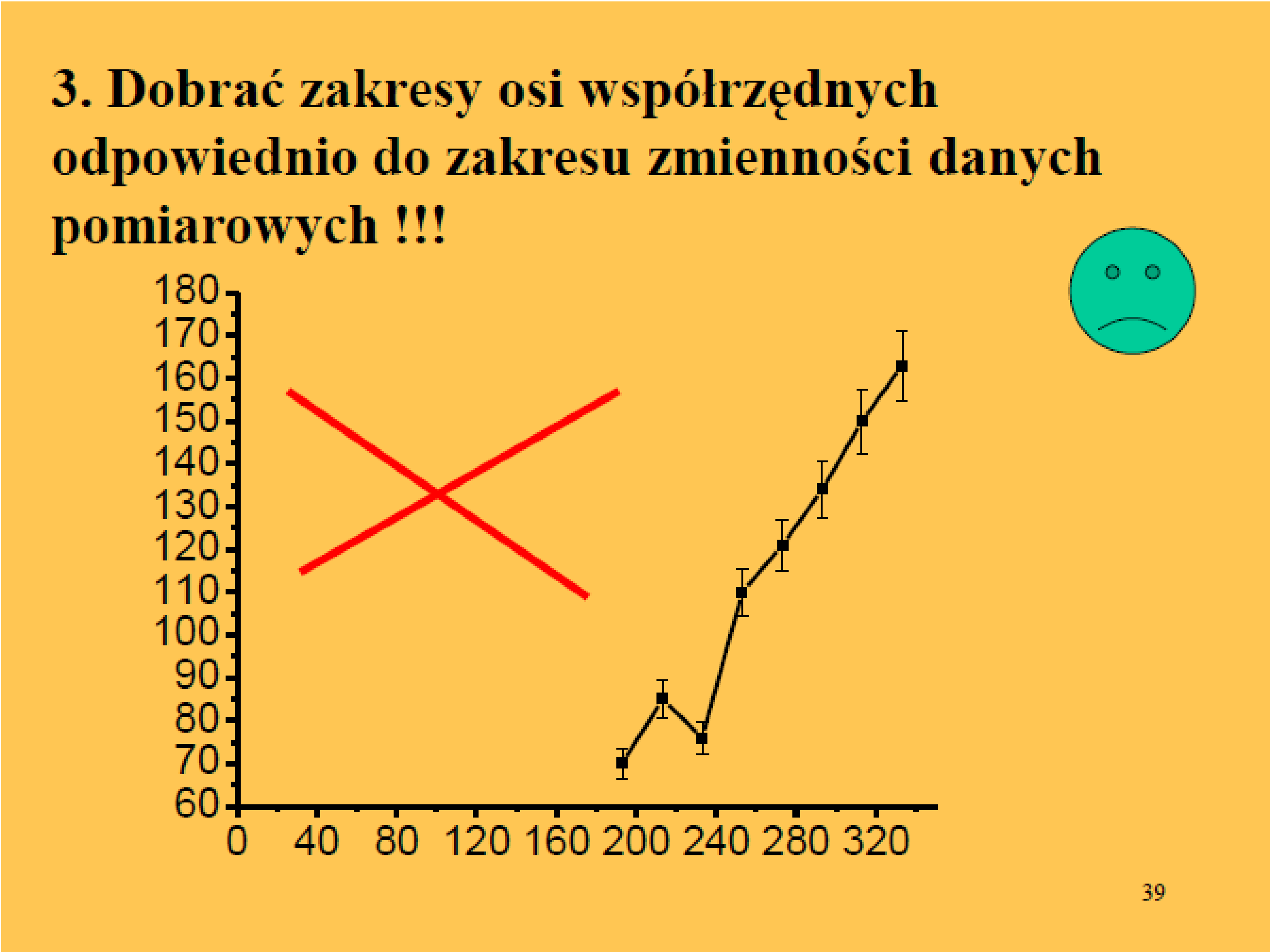
37

http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

Wykresy

http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

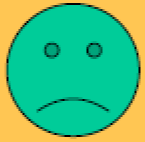
Wykresy

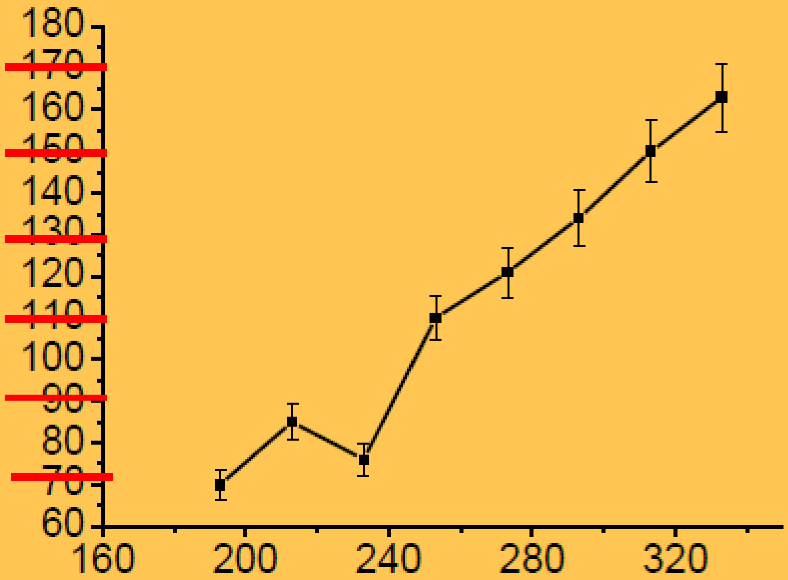


http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

Wykresy

4. Właściwie opisać osie współrzędnych i dobrać skalę, tak aby łatwo można było odczytać wartości zmierzone.





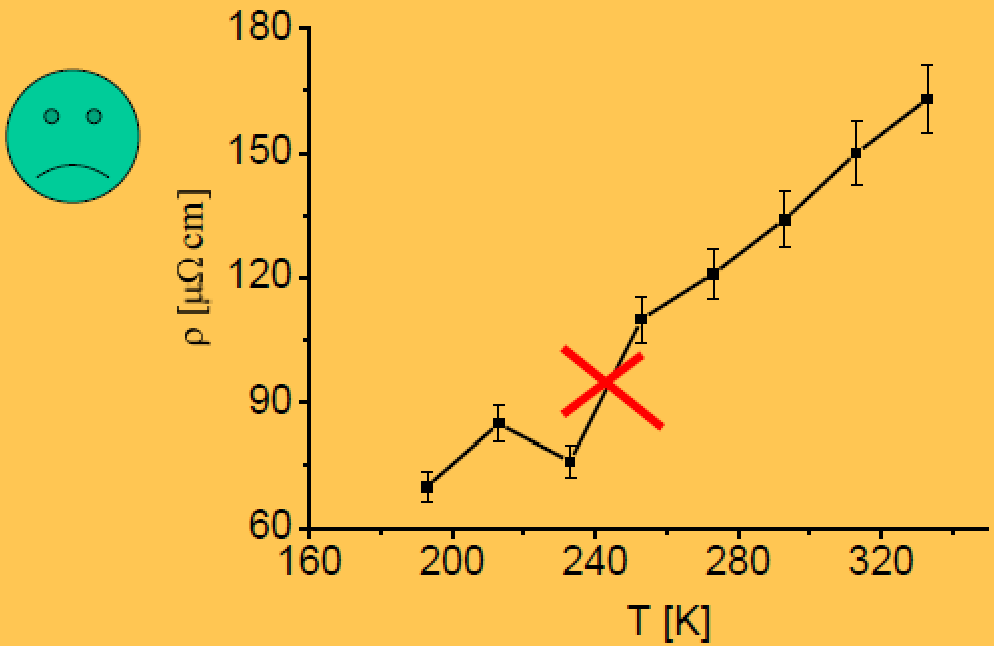
co jest na osiach ???

40

http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

Wykresy

5. Nie łączyć punktów eksperymentalnych linią łamaną!!! Jeśli znany jest przebieg teoretyczny to dokonać dopasowania teorii do doświadczenia (przeprowadzić fitowanie)

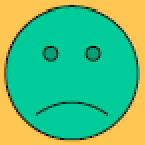


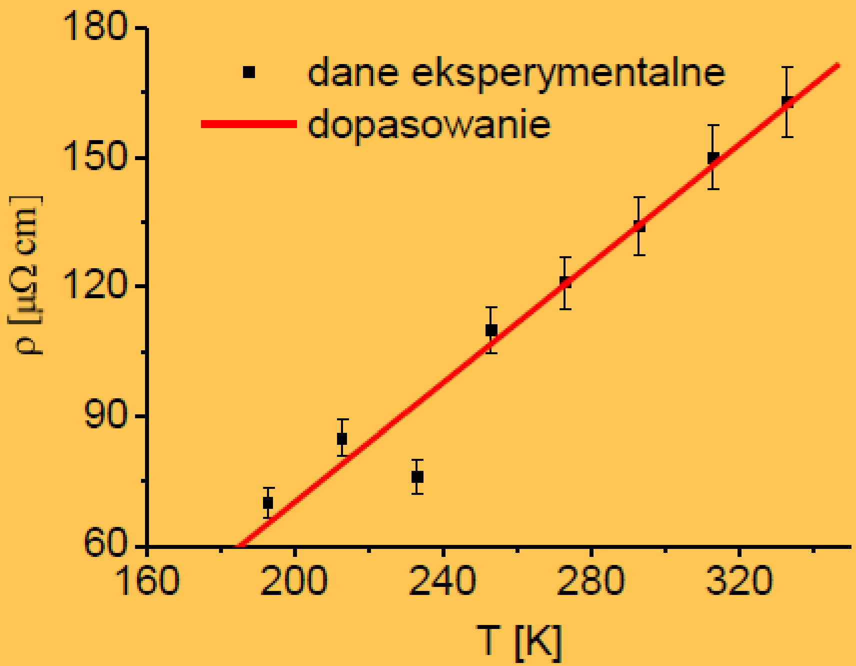
41

http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

Wykresy

6. Zadbać o aspekt estetyczny wykresu (opis, zamknięcie ramką, itp.)

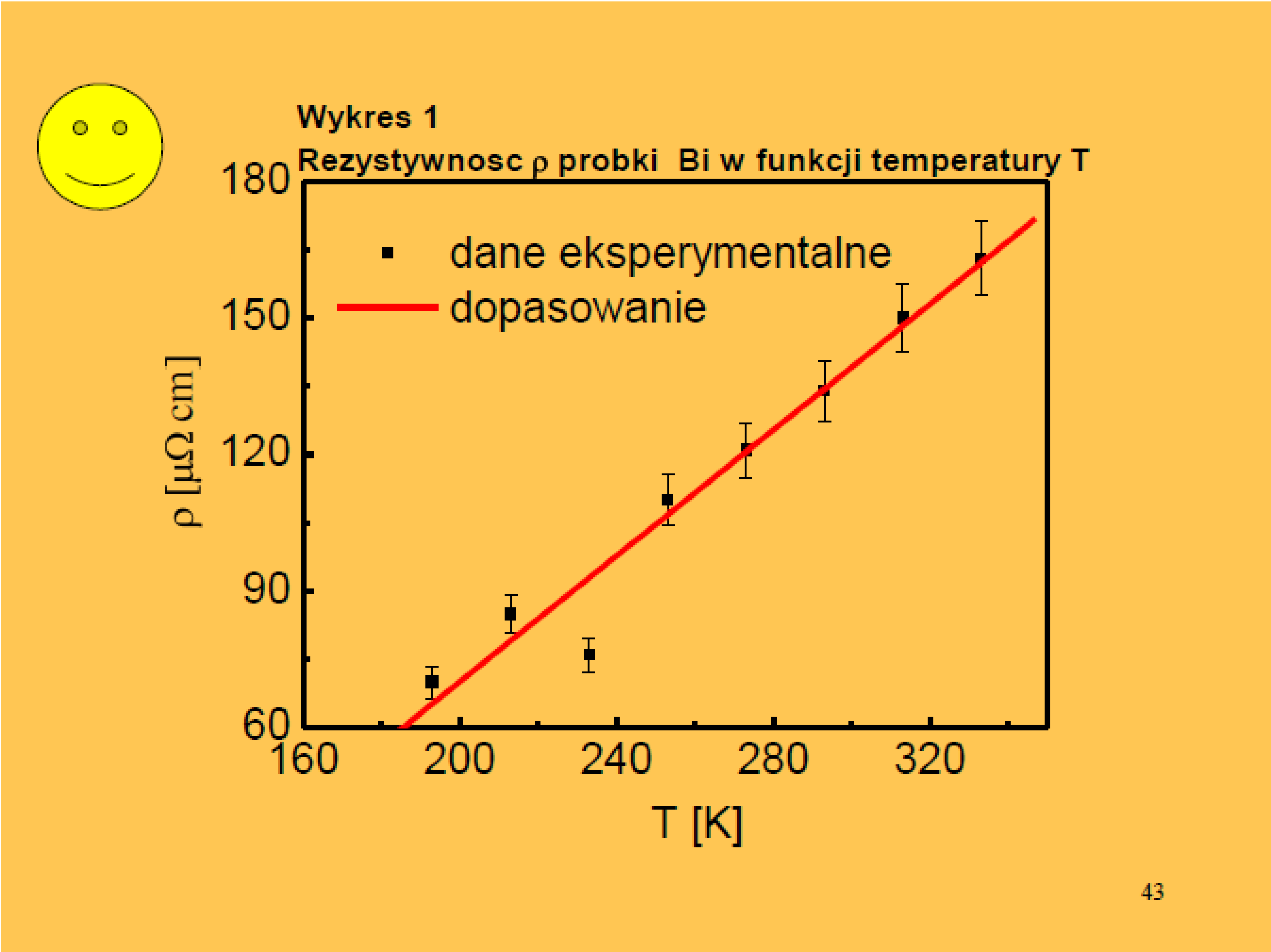




42

http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

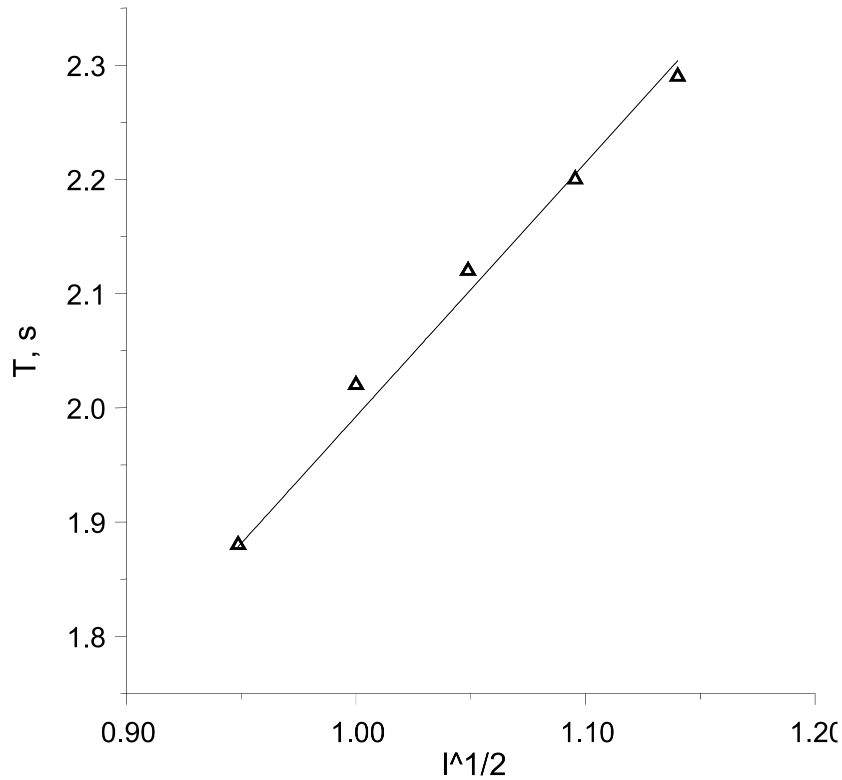
Wykresy



http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/RNP-2.pdf

Wykresy

Wykres może nie tylko ilustrować zależność między mierzonymi wielkościami, ale również może być pomocny w wyznaczeniu interesującej nas wielkości. Np. wartości okresów w funkcji pierwiastka z długości wahadła układają się na linii prostej.



Jej równanie: $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{l}$$

jest zgodne z ogólnym równaniem prostej: $$y = a \cdot x + b$$

gdy $a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$; $b = 0$

Regresja liniowa

- Istnieje metoda statystyczna, tzw. **metoda regresji liniowej**, pozwalająca najlepiej dopasować prostą do danych pomiarowych. Metoda pozwala obliczyć wartość współczynnika nachylenia prostej (*a*) i jego odchylenie standardowe (*s*(*a*)), jak również wartość wyrazu wolnego i jego odchylenie standardowe.
- Dopasowanie prostej do punktów pomiarowych można zrealizować np. przy użyciu funkcji REGLINP w arkuszu kalkulacyjnym Excel