ANALIZA DRGAŃ HARMONICZNYCH STRUNY

PYTANIA KONTROLNE

1. Równanie fali płaskiej
2. Fala stojąca, strzałki i węzły fali stojącej
3. Częstotliwość podstawowa drgań struny
4. Związek między częstotliwością drgań struny a jej długością
5. Zjawisko dyspersji fali $\omega = \omega(k)$

UKŁAD POMIAROWY

W celu wzbudzenia struny do drgań wykorzystano generator dźwięku komputera. W miejsce głośnika podłączony został wzmacniacz sterujący elektromagnesem, który przetwarza sygnał elektryczny na siłę mechaniczną działającą na strunę. Drgania struny obserwuje się na oscyloskopie dzięki przetwornikowi piezoelektrycznemu. Aby na ekranie zaobserwować drgania struny (sinusoidę) należy odpowiednio dobrać skale na obu osiach: poziomej (czas) i pionowej (napięcie).

POMIARY

I. ZALEŻNOŚĆ CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ STRUNY OD LICZBY FALOWEJ, DYSPERSJA

1. Ustawić elektromagnes na środku struny.
2. Znaleźć częstotliwość podstawową drgań zwiększając powoli częstotliwość i jednocześnie obserwować strunę oraz ekran oscyloskopu.

   ↘ *Przyciskając na klawiaturze komputera strzałki w górę lub w dół można odpowiednio zwiększać lub zmniejszać częstotliwość drgań generatora o 1 kHz. Klawisze Page Up i Page Down służą do zmiany częstotliwości o wartość równą 10 kHz. Po włączeniu programu jest wysyłany sygnał o częstotliwości 20 kHz. Strzałkami w prawo i lewo można zwiększać lub zmniejszać liczbę długości fal mieszczących się na strunie i używać ich należy jedynie w przypadku popełnionej pomyłki np. przeoczenia jakiejś harmonicznej.*

   Po otrzymaniu największej amplitudy drgań należy przycisnąć klawisz Enter i w ten sposób zarejestrowana zostanie wybrana częstotliwość.
3. Odszukać kolejne harmoniczne drgań struny.

   ↘ *Pomocą do tego służy wykreślona na ekranie prosta wskazująca gdzie w przybliżeniu można spodziewać się rezonansu. Elektromagnes należy zawsze ustawiać w okolicy strzałki fali. Na przykład dla drugiej harmonicznej będzie to w odległości 1/3 lub 2/3 od jednego z jej końców. Przy wyższych harmonicznych elektromagnes ustawiamy metodą prób.*
4. Znaleźć możliwie jak najwięcej harmonicznych (nie gubiąc po drodze żadnej z nich).

N	ν_N, kHz
1	
2	
3	
4	

II. WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI DŹWIĘKU W STRUNIE.

1. Ustawić długość struny na 85 cm.
2. Znaleźć częstotliwość podstawową drgań struny.
3. Zmieniając długość struny do 60 cm co 2 cm zmierzyć zależność częstotliwości podstawowej struny od długości struny.

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

I. ZALEŻNOŚĆ CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ STRUNY OD LICZBY FALOWEJ, DYSPERSJA

1. Dla każdego numeru harmonicznej drgań struny obliczyć odpowiednią liczbę falową fali w strunie.
2. Przedstawić na wykresie zależność rejestrowanych częstotliwości harmonicznych ν_N od liczby falowej k_N. Na tym samym wykresie zaznaczyć przebieg funkcji
$$\nu_N' = k_N \nu_1$$
która zakłada liniową zależność między częstotliwością ν_N' wyższych harmonicznych a częstotliwością podstawową ν_1.
2. Odchylenie otrzymanej doświadczalnie zależności $\nu_N = f(k_N)$ od prostej, opisanej wzorem z punktu 1, dowodzi istnienia zjawiska zwanego dyspersją fal poprzecznych w strunie.
3. Dla każdej harmonicznej obliczyć prędkość fali.
4. Sporządzić wykres zależności prędkości fali od częstotliwości i skomentować.

III. WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI DŹWIĘKU W STRUNIE.

1. Sporządzić wykres zależności częstotliwości pierwszej harmonicznej drgań struny od odwrotności długości struny (wyrażonej w m^{-1})
$$\nu_1 = f\left(\frac{1}{L}\right).$$
2. Stosując regresję liniową wyznaczyć współczynniki otrzymanej prostej.
3. Wyznaczyć prędkość fali w strunie, wraz z niepewnością (zależność 16).
4. Zapisać wynik w stosownym formacie.

UWAGA!

Poniżej zamieszczono pewne informacje dotyczące własności fal stojących, których źródłem jest wzbudzona do drgań struna o długości L zamocowana na obu końcach.

Częstotliwość podstawowa struny (najniższa częstotliwość z jaką może drgać struna) wynosi:

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1}, \tag{1}$$

gdzie v jest prędkością rozchodzenia się fali, λ_1 oznacza długość fali (długość ta jest dwa razy większa od długości L struny $\lambda_1 = 2L$).

Zależność między częstotliwością ν_N' wyższych harmonicznych a częstotliwością podstawową ν_1

$$\nu_N' = N\nu_1 \tag{2}$$

Klasyczne równanie falowe w jednym wymiarze ma postać:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

gdzie x = f(y,t) jest wychyleniem w kierunku poprzecznym do struny punktu odległego o y od jednego z jej końców w chwili t, v oznacza prędkość fal poprzecznych w strunie.
Podstawmy do równania (3) rozwiązanie w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych:

$$x(y,t)=A(y)B(t) \tag{4}$$

sprowadzając równanie (3) do następującej postaci:

$$B(t)\frac{d^2A(y)}{dy^2} - \frac{A(y)}{v^2}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Dzieląc równanie (5) przez x(y,t) a następnie mnożąc przez v^2 otrzymujemy:

$$\frac{v^2}{A(y)}\frac{d^2A(y)}{dy^2} = \frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Każda strona równania (6) jest funkcją innej zmiennej. Równość obu stron równania może zachodzić tylko wówczas, gdy obie strony są równe pewnej stałej. Oznaczmy tę stałą przez C i zapiszmy:

$$\frac{d^2A(y)}{dy^2} = \frac{C}{v^2}A(y), \tag{7a}$$

$$\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2} = CB(t). \tag{7b}$$

Jeśli stała C będzie posiadała wartość ujemną, to oba równania (7a) i (7b) opisują oscylator harmoniczny. Rozwiązania tych równań mają następującą postać:

$$A(y) = a_1\sin\left(\frac{\omega}{v}y\right) + a_2\cos\left(\frac{\omega}{v}y\right) \tag{8a}$$

oraz

$$B(t) = b\cos(\omega c + \varphi), \text{ gdzie } \omega^2 = -C, \text{ przy czym } C < 0. \tag{8b}$$

Podstawiając (8a) i (8b) do równania (4) otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie równania falowego, które opisuje falę stojącą:

$$x(y,t) = \left(A_1\sin(ky) + A_2\cos(ky)\right)\cos(\omega t + \varphi), \tag{9}$$

gdzie $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ (liczba falowa), $A_1 = a_1b$ oraz $A_2 = a_2b$.
Dla fali powstającej na odcinku struny o długości L zamocowanej na obu końcach należy uwzględnić, że dla y = 0 i y = L:

$$x(0,t)=x(L,t)=0 \tag{10}$$

i stąd na podstawie równania (9) mamy:

$$x(0,t)=A_2\cos(\omega t+\varphi)=0, \tag{11a}$$

$$x(L,t)=\left(A_1\sin(kL)+A_2\cos(kL)\right)\cos(\omega t+\varphi), \tag{11b}$$

Z ostatnich dwóch równań wynika, że:

$$A_2=0 \quad \text{i} \qquad \sin(kL)=0 \tag{12}$$

czyli liczba falowa k przyjmuje następujące dozwolone wartości

$$k_N=\frac{N\pi}{L}, \tag{13}$$

gdzie N jest liczbą naturalną.

Dla dozwolonych wartości długości fali mamy:

$$\lambda_N=\frac{2L}{N}, \tag{14}$$

Ponieważ $\omega_N = vk_N$, stąd otrzymujemy dozwolone wartości częstości kątowej drgań:

$$\omega_N=N\pi\frac{v}{L}, \tag{15}$$

lub częstotliwości drgań

$$\nu_N=N\frac{v}{2L}, \tag{16}$$

Równanie (9), które opisuje fale stojące wzbudzone na odcinku struny o długości L, po uwzględnieniu zależności (12), (13) i (15) przyjmuje postać:

$$x_N(y,t)=A_1\sin\left(N\pi\frac{y}{L}\right)\cos\left(N\pi\frac{y}{L}t+\varphi\right), \tag{17}$$

Wartość amplitudy A_1 oraz fazy początkowej ϕ określają warunki początkowe.
Wyrażenie

$$\omega_N=vk_N \tag{18}$$

określane jest jako tzw. związek dyspersyjny (patrz wzór (16)). Sporządzając wykres zależności częstości kątowej ω_n od liczby falowej k_n (wzór (3)) możemy stwierdzić, że prędkość fazowa zależy od długości lub też wykażemy brak takiej zależności. Jeśli wykres funkcji $\omega_n = f(k_n)$ nie będzie linią prostą, to wówczas zaleca się wykonanie kolejnych wykresów, które przedstawiać będą następujące zależności:

$$v=f(k_N) \tag{19}$$

oraz

$$\frac{d}{dk_N}\omega_N=f(k_N). \tag{20}$$