Dopasowanie funkcji do wyników pomiarów. Część 2.

Do wyników pomiarów $\{x_i, y_i\}$ została dopasowana zależność

$$y = f(x)$$

z pewnymi parametrami $\{a_0, a_1, ..., a_m\}$. Rezultatem dopasowania są wektor wartości parametrów $\mathbf{a}$ oraz macierz kowariancji parametrów $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Może nas teraz interesować wartość y_0 wielkości Y odpowiadająca pewnej wartości x_0. Taka sytuacja może wystąpić, jeżeli pomiary $\{x_i, y_i\}$ wykonano w celu, np. wykalibrowania jakiegoś przyrządu pomiarowego. Wtedy zależność $y = f(x)$ jest używana do ustalenia wartości y_0 odpowiadającej x_0 (lub odwrotnie). Oczywiście

$$y_0 = f(x_0)$$

ale ponieważ wartości parametrów a_k są obarczone niepewnościami, to należy jeszcze wyznaczyć niepewność $u(y_0)$ wartości y_0.

Wykorzystując ogólną postać reguły propagacji niepewności możemy zapisać:

$$u^2(y_0) = \sum_{i=0}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial a_i} \sigma_{a_i} \right]^2 + \sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_j} \right)^2 \sigma_{a_i a_j} \right]$$

albo wykorzystując elementy macierzy kowariancji $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$u^2(y_0) = \sum_{i=0}^{m} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 \varepsilon_{ii} \right] + 2 \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_j} \varepsilon_{ij} \right]$$

Ponieważ parametry a_k mogą być skorelowane, to musimy tym razem uwzględnić wyrazy zawierające kowariancje między nimi.

W przypadku wyznaczania wartości x_0 dla ustalonej y_0 postępujemy podobnie, z tym, że korzystamy z funkcji $x = g(y)$, gdzie funkcja $g = f^{-1}$ jest funkcją odwrotną dla f, i zastępując pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial a_i}$ odpowiednimi pochodnymi $\frac{\partial g}{\partial a_i}$.

Przykład.
Pomiary spadku potencjału wzdłuż drutu oporowego z prądem mają służyć do wykalibrowania prostego przetwornika położenie – napięcie. Pomiary napięcia mają być przeliczane na odpowiadające im położenie ruchomego elementu połączonego z suwakiem ślizgającym się po drucie oporowym.

$$U = f(x) = ax + b\,.$$

Funkcją odwrotną jest

$$x = g(U) = \frac{U-b}{a} = \frac{1}{a}U - \frac{b}{a}\,.$$

Pochodne cząstkowe względem parametrów $\{a, b\}$ wynoszą

$$\frac{\partial g}{\partial a} = -U\,\frac{1}{a^2} + \frac{b}{a^2} = -\frac{1}{a}\,g(U)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = -\frac{1}{a}$$

Potrzebne nam jeszcze będą wartości kowariancji między parametrami a i b.
Układ równań określających minimum χ^2 ma w tym wypadku postać

$$bS_w + aS_x = S_y$$

$$bS_x + aS_{xx} = S_{xy}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} S_w & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{bmatrix},\quad \Delta = \begin{vmatrix} S_w & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{vmatrix} = S_w S_{xx} - S_x^2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} S_{xx}/\Delta & -S_x/\Delta \\ -S_x/\Delta & S_w/\Delta \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$x_0 = \frac{U_0 - b}{a}$$

$$u^2(x_0) = \frac{x_0^2}{a^2}\frac{S_w}{\Delta} + \frac{1}{a^2}\frac{S_{xx}}{\Delta} + 2\,\frac{x_0}{a^2}\left(-\frac{S_x}{\Delta}\right)$$

$$u(x_0) = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\frac{S_w}{\Delta} + \frac{1}{a^2}\frac{S_{xx}}{\Delta} - 2\,\frac{x_0}{a^2}\frac{S_x}{\Delta}} = \frac{1}{a}\sqrt{x_0^2\,\frac{S_w}{\Delta} + \frac{S_{xx}}{\Delta} - 2x_0\,\frac{S_x}{\Delta}}$$

Jeżeli wartość U_0 też pochodzi z pomiaru i obarczona jest niepewnością $u(U_0)$, to uwzględniając, że

$$\frac{\partial x_0}{\partial U_0} = \frac{1}{a},$$

niepewność $u(x_0)$ musimy powiększyć do

$$u(x_0) = \frac{1}{a}\sqrt{x_0^2\frac{S_w}{\Delta} + \frac{S_{xx}}{\Delta} - 2x_0\frac{S_x}{\Delta} + u^2(U_0)}$$

W przykładzie rachunkowym mieliśmy

$u(U) = 0{,}05\,\mathrm{V}$ - stała wartość wyłączona z obliczeń (tzn. $w_i = 1$)

$S_x = 450\,\mathrm{cm}$

$S_{xx} = 28500\,\mathrm{cm}^2$

$S_y = 12{,}44\,\mathrm{V}$

$S_{xy} = 779{,}30\,\mathrm{cmV}$

$\Delta = 54000\,\mathrm{cm}^2$

$a = 26{,}217\,\mathrm{mV/cm}$ $u(a) = 0{,}645\,\mathrm{mV/cm}$

$b = 71{,}4\,\mathrm{mV}$ $u(b) = 36{,}3\,\mathrm{mV}$

$$\varepsilon_{12} = -u^2(U)\frac{S_x}{\Delta}$$

$$u(x_0) = \frac{u(U)}{a}\sqrt{x_0^2\frac{S_w}{\Delta} + \frac{S_{xx}}{\Delta} - 2x_0\frac{S_x}{\Delta} + 1}$$

Dla $U_0 = 1{,}20\,\mathrm{V}$ otrzymujemy $x_0 = \dfrac{1{,}20\,\mathrm{V} - 0{,}0714\,\mathrm{V}}{0{,}026217\,\mathrm{V/cm}} = 43{,}048\,\mathrm{cm}$

$$u(x_0) = \frac{0{,}05\,\mathrm{V}}{0{,}026217\,\mathrm{V/cm}}\sqrt{43{,}048^2\frac{10}{54000} + \frac{28500}{54000} - 2\cdot 43{,}048\frac{450}{54000} + 1} =$$

$$u(x_0) = \frac{0{,}05\,\mathrm{V}}{0{,}026217\,\mathrm{V/cm}}\sqrt{0{,}3432 + 0{,}5278 - 0{,}7175 + 1} = 2{,}048\,\mathrm{cm}$$

Ostatecznie

$$x_0 = 43{,}0\,\mathrm{cm},\quad u(x_0) = 2{,}0\,\mathrm{cm}$$