Estymatory średniej i dyspersji.

Zakładamy, że w czasie doświadczenia otrzymaliśmy zestaw n wartości zmiennej losowej X o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa (gęstości prawdopodobieństwa).

$$\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania dowolnej z tych wartości wynosi

$$P(x_i) \text{ albo } dP(x_i, x_i + dx) = p(x_i) \cdot dx$$

odpowiednio dla zmiennej dyskretnej albo ciągłej.

Jeżeli możemy założyć, że kolejne wartości są niezależne, to prawdopodobieństwo otrzymania całego ich zestawu $\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$ wynosi

$P(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i)$ dla zmiennej dyskretnej albo

$dP(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(p(x_i) \cdot dx\right)$ dla zmiennej ciągłej. Prawdopodobieństwo to zależy od samych wartości $\{x_i\}$ i od postaci rozkładu prawdopodobieństwa. Na przykład dla rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$

$$dP(x_i, x_i + dx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot dx$$

prawdopodobieństwo będzie zależało od średniej i dyspersji tego rozkładu.

$$dP(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot dx \right)$$

$$dP(\{x_i\}) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \prod_{i=1}^{n}(dx)$$

Funkcja

$$p(\{x_i\}; \mu, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

ma sens funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa otrzymania zestawu wartości $\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$.

Metoda największej wiarogodności

Wykonując pomiary nie znamy wartości mierzonej, tzn. nie znamy parametrów μ i σ rozkładu $p(\{x_i\};\mu,\sigma)$ i celem pomiarów jest ich wyznaczenie. Możemy jednak przypuszczać, że to co się wydarzyło, to znaczy, że otrzymaliśmy zestaw konkretnych wartości $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$, było najbardziej prawdopodobne. Zamiast zatem pytać jakie są faktyczne wartości parametrów μ i σ (na to pytanie zwykle nie można odpowiedzieć), możemy zapytać o coś innego.
Dla uproszczenia załóżmy jeszcze, że interesuje nas tylko wartość średnia, a dyspersję albo znamy skądinąd, albo nie jest nam potrzebna jej wartość.
To inne pytanie brzmi:
Dla jakiej wartości μ' hipotetycznej średniej rozkładu otrzymanie zestawu wartości $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ jest najbardziej prawdopodobne?
Czyli dla jakiej wartości μ' funkcja

$$p(\mu') = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2\right]$$

osiąga maksimum przy ustalonych $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ i σ.
Na takie pytanie można odpowiedzieć, i to stosunkowo łatwo, chodzi bowiem o znalezienie maksimum funkcji jednej zmiennej.
Funkcja $p(\mu')$ osiąga maksimum kiedy wartość sumy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2$$

jest minimalna. Oznacza to, że pochodna sumy przyjmuje wartość zero

$$\frac{\partial}{\partial\mu'}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2 = 0$$

Pochodna wynosi

$$\frac{\partial}{\partial \mu'}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}2\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)\left(\frac{-1}{\sigma}\right)=-\frac{2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)$$

i osiąga zero gdy zeruje się suma

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)=0 \quad \Big| \cdot\sigma$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu'=0$$

czyli gdy μ' jest równe średniej arytmetycznej wartości $\{x_1, x_2, x_3,...x_n\}$

$$\mu'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Wartość μ' jest estymatorem największej wiarogodności wartości średniej rozkładu $N(\mu,\sigma)$.

Jeżeli $\{x_1, x_2, x_3,...x_n\}$ są wynikami bezpośrednich pomiarów wielkości fizycznej X , to ich średnia arytmetyczna jest najlepszym oszacowaniem wartości X . Oprócz szacunku samej wartości musimy podać też niepewność oszacowania, czyli pierwiastek wariancji μ'. Oznaczmy ją przez $V(\mu')$.

$$V(\mu')=V\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)$$

W celu obliczenia wartości prawej strony możemy wykorzystać wprowadzone poprzednio prawo przenoszenia niepewności (w istocie było to prawo przenoszenia wariancji, które dla naszych celów przekształciliśmy w prawo przenoszenia niepewności), a właściwie pewne specjalne wzory wyprowadzone z tego prawa.

$$V\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot V\left(\sum x_i\right)$$

Jeżeli wartości $\{x_1, x_2, x_3,...x_n\}$ są niezależne, to

$$V\left(\sum x_i\right)=\sum V(x_i)=n\cdot\sigma^2$$

Ostatecznie

$$V(\mu')=\left(\frac{1}{n}\right)^2 n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

Czyli wynik serii pomiarów mógłby wyglądać na przykład tak:

$$X=\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ u(X)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma\ .$$

♦

Załóżmy teraz, że znamy wartość średnią rozkładu μ, a chcielibyśmy znaleźć estymator dyspersji tego rozkładu σ'.

Jeżeli σ' ma być estymatorem największej wiarogodności, to tym razem funkcja

$$p(\sigma')=\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma'}\right)^2\right]$$

ma osiągnąć maksimum ze względu na σ', czyli

$$\frac{\partial}{\partial\sigma'}p(\sigma')=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma'}\left(\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma'}\right)^2\right]\right)=0$$

$$n\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}\left(\frac{-1}{\sigma'^2\sqrt{2\pi}}\right)e^{-(\ldots)}+\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-(\ldots)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma'^3}\right)=0$$

$$\left(\frac{-n}{\sigma'}\right)\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-(\ldots)}+\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-(\ldots)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma'^3}\right)=0$$

Po podzieleniu stronami przez

$$\left(\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-(\ldots)}$$

otrzymujemy

$$\left(\frac{-n}{\sigma'}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma'^3}\right)=0\quad\Big|\cdot\sigma'^2$$

$$-n\sigma'^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

czyli

$$\sigma'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\sigma'=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Estymatorem największej wiarogodności wariancji rozkładu $N(\mu,\sigma)$ jest σ'^2 – średni kwadrat odchylenia wartości $\{x_1,x_2,x_3,...x_n\}$ od wartości średniej tego rozkładu, a estymatorem dyspersji jest σ'.

Najczęściej nie znamy żadnego parametrów rozkładu i musimy je oszacować tylko na podstawie uzyskanych wartości doświadczalnych $\{x_1,x_2,x_3,...x_n\}$.

Nie zmienia to sposobu wyznaczenia wartości μ' i w dalszym ciągu najlepszym estymatorem (w sensie metody największej wiarogodności) pozostaje średnia arytmetyczna.

$$\mu'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ .$$

Do wyznaczenia estymatora dyspersji (albo wariancji) potrzebna jest znajomość wartości średniej rozkładu. Jeżeli użyjemy w tym celu wartości μ' zamiast μ, to moglibyśmy zapisać

$$\sigma'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu')^2\ .$$

Okazuje się jednak, że taki estymator jest obciążony, to znaczy, że wartość średnia σ'^2 jest różna od σ^2. W statystyce dowodzi się, że

$$E(\sigma'^2)<\sigma^2\ .$$

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
E(\sigma'^2) &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu')^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((x_i-\mu)+(\mu-\mu'))^2\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu)-(\mu'-\mu)]^2\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu)^2-2(x_i-\mu)(\mu'-\mu)+(\mu'-\mu)^2\right]\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-2(\mu'-\mu)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)+\frac{1}{n}n(\mu'-\mu)^2\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-2(\mu'-\mu)^2+(\mu'-\mu)^2\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-(\mu'-\mu)^2\right] = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left((x_i-\mu)^2\right)-E\left((\mu'-\mu)^2\right) = \\
&= E\left((x_i-\mu)^2\right)-E\left((\mu'-\mu)^2\right) = V(x)-V(\mu')
\end{aligned}
$$

Czyli

$$
E\left(\sigma'^2\right) = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2
$$

i

$$
s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu')^2
$$

jest już nieobciążonym estymatorem wariancji.

Po uwzględnieniu ostatniego wzoru wynik pomiarów można by przedstawić następująco:

$$
X = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ u(X) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i-1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\ .
$$

Średnia ważona

We wzorze

$$dP(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(P(x_i) \cdot dx \right)$$

wcale nie jest konieczne, żeby wszystkie x_i miały dokładnie takie same rozkłady. Równie dobrze moglibyśmy zapisać

$$dP(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(p_i(x_i) \cdot dx \right)$$

a funkcja

$$p(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

miałaby taką samą interpretację jak poprzednio.

Załóżmy, że rozkłady

$$p_i(x_i;\mu,\sigma_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_i} \right)^2 \right]$$

mają wszystkie tę samą wartość średnią i różne dyspersje.
Wtedy rozkład gęstości prawdopodobieństwa otrzymania ciągu wartości $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ wyniesie

$$p(\{x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i;\mu,\sigma_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_i} \right)^2 \right].$$

Taki przypadek odpowiada sytuacji, kiedy kolejne wartości $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ wyznaczono niezależnie metodami różniącymi się precyzją scharaktery-zowaną różnymi wartościami σ_i.

Stosując metodę największej wiarogodności do wyznaczenia estymatora wartości średniej μ będziemy szukali maksimum funkcji

$$p(\mu') = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\right)\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right)^2\right].$$

Podobnie jak poprzednio odpowiada to znalezieniu minimum sumy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu'}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right)^2 = -2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i^{\ 2}}\right) = 0$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma_i^{\ 2}}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu'}{\sigma_i^{\ 2}}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma_i^{\ 2}}\right) = \mu'\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^{\ 2}}\right)$$

i ostatecznie

$$\mu' = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i/\sigma_i^{\ 2}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(1/\sigma_i^{\ 2}\right)}$$

W celu ustalenia wariancji tego estymatora obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial\mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i/\sigma_i^{\ 2}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(1/\sigma_i^{\ 2}\right)} = \frac{1/\sigma_i^{\ 2}}{\sum_{i=1}^{n}\left(1/\sigma_i^{\ 2}\right)}$$

i zgodnie z prawem przenoszenia wariancja wynosi

$$V(\mu') = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1/\sigma_i^2}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}\right]^2\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1/\sigma_i^2}{\left[\sum\left(1/\sigma_i^2\right)\right]^2} = \frac{1}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}$$

Niepewności względne

Może się zdarzyć, że znamy względne wartości σ_i nie znając przy tym ich wartości bezwzględnych. Wprowadzimy czynniki wagowe (wagi) w_i

$$kw_i = \frac{1}{\sigma_i}$$

gdzie k jest pewną stałą. Znajomość względnych niepewności odpowiada znajomości wartości wag w_i nawet jeżeli σ_i pozostają nieznane. Wtedy

$$\mu' = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i / \sigma_i^{\,2}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(1/\sigma_i^{\,2}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(kw_i x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(kw_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(w_i)}$$

W celu ustalenia wariancji tak obliczonej średniej wprowadzimy nową wielkość – średnią ważoną wariancję wyników σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum w_i (x_i - \mu')^2}{\sum w_i}\frac{n}{n-1} = \left(\frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i} - \mu'^2\right)\frac{n}{n-1}$$

Wartość w nawiasie jest różnicą średniego ważonego kwadratu wyników i kwadratu średniej ważonej wyników. Pozostały czynnik uwzględnia fakt, że wartość μ' została obliczona z tych samych wyników, zmniejszając liczbę stopni swobody.
Przez analogię z wcześniej otrzymanymi związkami możemy zapisać, że wariancja μ' wynosi

$$V(\mu') = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i} - \mu'^2\right)$$

Jeżeli chcielibyśmy znaleźć nieznane dotąd wartości k i σ_i, to możemy przyrównać

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{\sum 1/\sigma_i^2} = \frac{1}{k\sum w_i}$$

czyli

$$k = \frac{n}{\sigma^2} \frac{1}{\sum w_i} = \frac{n-1}{\sum w_i \left(\frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i} - \mu'^2 \right)}$$

oraz

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{k w_i} = \frac{\sigma^2 \sum w_i}{n w_i}$$

<u>Przykład</u>
Studentka przeprowadza doświadczenie w celu określenia napięcia ogniwa normalnego. Wykonuje 40 pomiarów przy pomocy pewnego przyrządu i znajduje, że

$$\bar{x}_1 = 1{,}0220\ \mathrm{V}$$

z odchyleniem standardowym

$$s_1 = 0{,}010\ \mathrm{V}$$

Po przyjrzeniu się wynikom zauważa, że mogłaby ulepszyć układ pomiarowy i zmniejszyć niepewność o czynnik 2,5 $s_2 = 0{,}0040\ \mathrm{V}$. Wykonuje kolejnych 10 pomiarów, które dają

$$\bar{x}_2 = 1{,}0180\ \mathrm{V}$$

Średnia wyników wszystkich wykonanych pomiarów wynosi

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \left(x_i / \sigma_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^{50} \left(1 / \sigma_i^2 \right)} = \frac{\sum_{i=1}^{40} \left(x_{1i} / s_1^2 \right) + \sum_{i=1}^{10} \left(x_{2i} / s_2^2 \right)}{\sum_{i=1}^{40} \left(1 / s_1^2 \right) + \sum_{i=1}^{10} \left(1 / s_2^2 \right)}$$

$$= \frac{\frac{40 \cdot 1{,}022}{0{,}01^2} + \frac{10 \cdot 1{,}018}{0{,}004^2}}{\frac{40}{0{,}01^2} + \frac{10}{0{,}004^2}}\ \mathrm{V} = \frac{4{,}00 \cdot 1{,}022 + 6{,}25 \cdot 1{,}018}{4{,}00 + 6{,}25}\ \mathrm{V}$$

$$= 1{,}019561\ \mathrm{V}$$

Niepewność wartości średniej napięcia

$$u(\bar{x}) = \left(\frac{40}{0{,}01^2} + \frac{10}{0{,}004^2} \right)^{-1/2} = 0{,}000987\ \mathrm{V}$$

Ostateczny wynik należy zapisać w formie

$$\bar{x} = 1{,}01956\ \mathrm{V}\,,\ u(\bar{x}) = 0{,}00099\ \mathrm{V}$$

lub alternatywnie $$\bar{x} = 1{,}01956\,(99)\ \mathrm{V}$$

Niepewność końcowego wyniku jest mniejsza od niepewności uzyskanych w każdej z części doświadczenia

$$u(\bar{x}_1) = \frac{0{,}01}{\sqrt{40}}\ \mathrm{V} = 0{,}0016\ \mathrm{V}\,,\ u(\bar{x}_2) = \frac{0{,}004}{\sqrt{10}}\ \mathrm{V} = 0{,}0013\ \mathrm{V}$$

Co by było gdyby studentka nie znała bezwzględnych wartości niepewności swoich pomiarów, a tylko wiedziała (np. od prowadzącego zajęcia), że zostały zmniejszone w drugiej części o czynnik 2,5?
Średnią ważoną może obliczyć w taki sposób

$$w_1 = \frac{1}{s_1^2} = 1,\ \ w_2 = \frac{1}{s_2^2} = 2{,}5^2$$

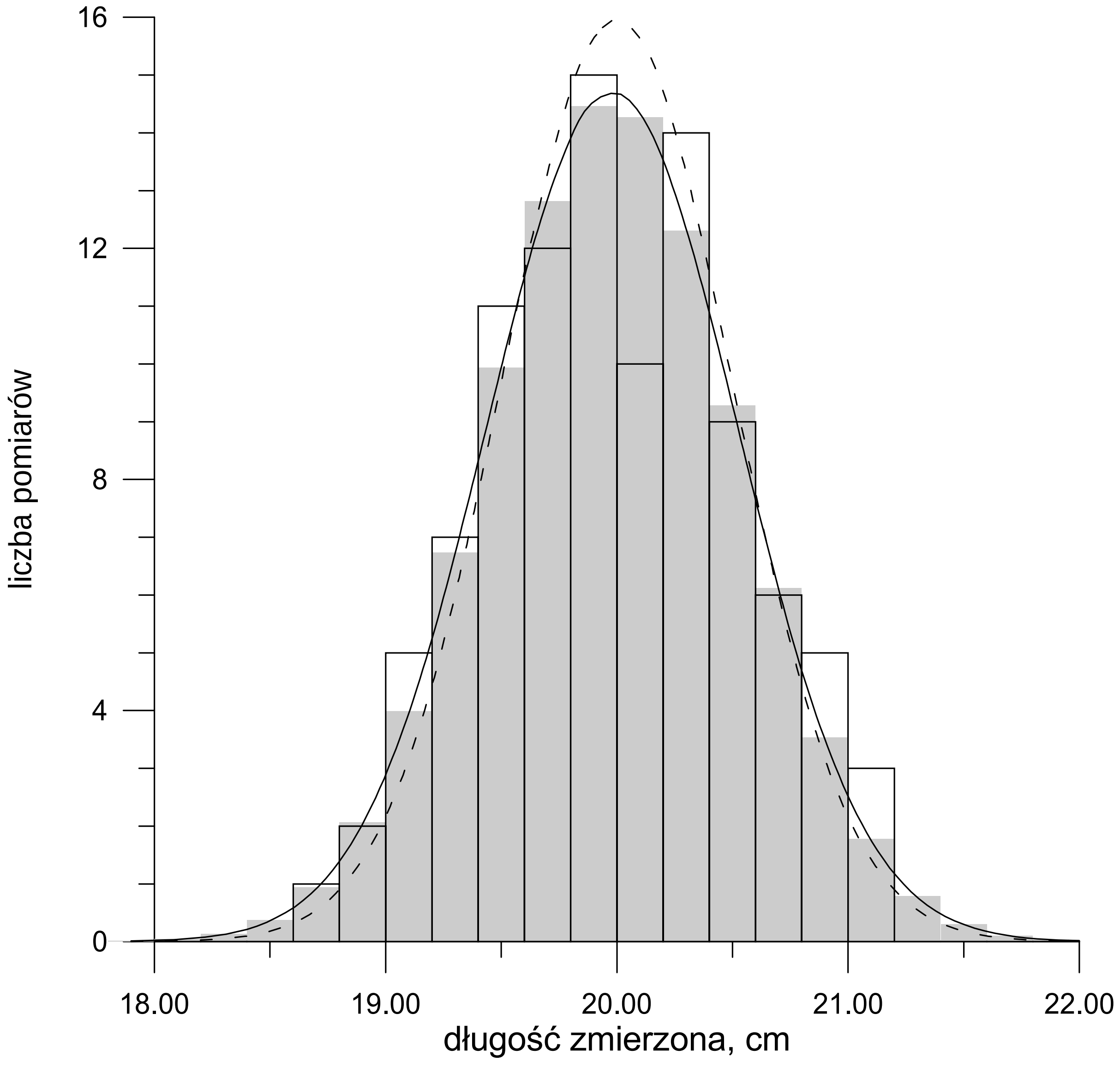
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i\right)} = \frac{40\cdot 1\cdot 1{,}022 + 10\cdot 2{,}5^2\cdot 1{,}018}{40\cdot 1 + 10\cdot 2{,}5^2}\ \mathrm{V} = 1{,}01956\ \mathrm{V}$$

Niepewność średniej ważonej wyniesie wtedy

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i} - \bar{x}^2\right) = \frac{1}{39}\left(\frac{\sum_{i=1}^{40} x_{1i}^2 + 2{,}5^2 \sum_{i=1}^{10} x_{2i}^2}{40 + 10\cdot 2{,}5^2} - \bar{x}^2\right)$$

Przykład

Student wykonał 100 niezależnych pomiarów długości drewnianego klocka. Wyniki, po korekcie błędów systematycznych, mieszczą się w przedziale od około 18 do 22 cm i wiele z nich powtarza się. Na wykresie przedstawiono je w postaci histogramu (słupki narysowane cienką ciągłą linią) o szerokości przedziału 0,2 cm. Jeżeli obserwowany rozkład wynika z błędów przypadkowych, to jest bardzo prawdopodobne, że da się opisać przy pomocy rozkładu Gaussa (normalnego). Rozkład narysowany linia ciągłą odpowiada parametrom wyznaczonym z wyników pomiarów: średnia 19,98 cm i odchylenie standardowe 0,54 cm.



Histogram z szarych słupków jest wyliczony z tego rozkładu normalnego i przedstawia oczekiwaną (średnią) liczbę pomiarów w każdym przedziale. Rozkład narysowany linią przerywaną odpowiada $N(20{,}00; 0{,}50)$.

Usuwanie wyników odstających

Załóżmy, że wśród wyników zanotowanych przez studenta w karcie pomiarowej znalazł się jeden wyraźnie inny od pozostałych – 91,2 cm. Zwykle w takim przypadku nie ma wątpliwości, że nastąpiła pomyłka przy zapisywaniu wyniku i wynik odrzuca się jako tzw. błąd gruby. Sytuacja wygląda jednak inaczej jeżeli odstający wynik wynosiłby np. 22,2 cm. Jeżeli w zestawie 100 wyników wartość 21,2 zastąpimy przez 22,2, to średnia i odchylenie standardowe zmienią się odpowiednio na 19,99 i 0,54. Odległość wyniku od średniej wynosi prawie 4 odchylenia standardowe. Z rozkładu Gaussa $N(19{,}99;\,0{,}54)$ można wyliczyć, że prawdopodobieństwo przypadkowego pojawienia się rezultatu, który jest niemniej oddalony od średniej wynosi około $12{\cdot}10^{-5}$, to znaczy że spodziewana liczba wyników ≥22,2 cm (lub ≤17,78 cm) wynosi $12{\cdot}10^{-5} \times 100$ = 0,012. Czy tak mało prawdopodobny rezultat możemy odrzucić?

Kryterium Chauveneta

Odstający rezultat x_0 można odrzucić, jeżeli spodziewana liczba takich przypadków, że $|x-\bar{x}| \geq |x_0-\bar{x}|$

$$n = N \cdot P(|x-\bar{x}| \geq |x_0-\bar{x}|) < 0{,}5$$

Kryterium Chauveneta należy stosować z dużą ostrożnością, mając pewność, że potrafimy poprawnie obliczyć prawdopodobieństwo $P(|x-\bar{x}| \geq |x_0-\bar{x}|)$, co zwykle oznacza, że musimy znać faktyczny rozkład prawdopodobieństwa w danych warunkach.