Prawo propagacji niepewności.

W przypadku pomiarów metodą pośrednią wartość wielkości ustala się na podstawie wartości innych wielkości zmierzonych bezpośrednio. Na przykład objętość V_0 prostopadłościanu o krawędziach D_0, S_0, W_0 znajdziemy mierząc długości każdej krawędzi i obliczając

$$V = D \cdot S \cdot V$$

W jaki sposób niepewności pomiarów długości krawędzi przenoszą się na niepewność wyznaczenia objętości prostopadłościanu? Gdyby znane były błędy pomiarów, to po rozwinięciu $V(D,S,W)$ w szereg Taylora i pominięciu składników rozwinięcia wyższych rzędów otrzymujemy

$$V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)\Delta D + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)\Delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial W}\right)\Delta W$$

skąd można by już było znaleźć szukaną różnicę w objętości

$$\Delta V = V - V_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)\Delta D + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)\Delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial W}\right)\Delta W .$$

Błędy pomiarów nie są jednak znane i musimy poszukać innego sposobu.

Przypuśćmy, że wyznaczamy wartość wielkości Y, która jest funkcją dwóch, lub więcej, mierzonych zmiennych x_1 i $x_2,\ldots$.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots).$$

Na podstawie pomiarów wyznaczamy wartości średnie i niepewności

$$\bar{x}_i, u(\bar{x}_i)$$

W pierwszym przybliżeniu najlepszą wartość wielkości wyznaczanej da

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$$

a jej niepewność możemy oszacować na podstawie rozrzutu wartości

$$y_j = f(x_{1j}, x_{2j}, \ldots)$$

otrzymanych przez podstawienie różnych zestawów indywidualnych wartości x_{ij} do funkcji f.

Miarą niepewności $u(y)$ jest pierwiastek wariancji (odchylenie standardowe)

$$\sigma_y^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum\left(y_j - \bar{y}\right)^2\right].$$

Różnicę $y_j - \bar{y}$ możemy oszacować podobnie jak wcześniej ΔV

$$y_j - \bar{y} \cong \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right) + \ldots$$

i podstawiając otrzymujemy

$$\sigma_y^2 \cong \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right) + \frac{\partial y}{\partial x_2}\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right) + \ldots\right]^2$$

$$\cong \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)^2 + \right.$$

$$\left. 2\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right) + \ldots\right]$$

Dwa pierwsze składniki można wyrazić przez odpowiednie wariancje

$$\sigma_{x_1}^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)^2\right] \text{ i } \sigma_{x_2}^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)^2\right].$$

Następny składnik wymaga wprowadzenia pojęcia kowariancji między zmiennymi x_1 i x_2.

$$\sigma_{x_1x_2} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum\left[\left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)\right]\right].$$

Ostatecznie, po podstawieniach

$$\sigma_y^2 \cong \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2 + \ldots + 2\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\sigma_{x_1x_2} + \ldots.$$

Z definicji niepewność jest pierwiastkiem estymatora wariancji, czyli

$$u^2(y) \cong \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \ldots + 2\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_1, x_2) + \ldots$$

gdzie $u(x_1, x_2)$ jest estymatorem kowariancji między x_1 i x_2.

Wzór

$$u^2(y) = \sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_1, x_2)$$

nazywa się wzorem propagacji (przenoszenia) niepewności i wyraża prawo propagacji niepewności.

W przypadku niezależności zmiennych, braku korelacji, kowariancje między nimi znikają i prawo propagacji niepewności można zapisać w formie uproszczonej

$$u^2(y) = \sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

albo

$$u(y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

<u>Szczególne przypadki wynikające z prawa propagacji niepewności</u>
(użyteczne przy szacowaniu niepewności złożonej)

Suma i różnica

$$y = x \pm a$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \;\Rightarrow\; u(y) = u(x)$$

W przypadku różnicy może się zdarzyć, że $u(y) > y$.
Niepewność względna wyniesie

$$u_r(y) = \frac{u(y)}{y} = \frac{u(x)}{x \pm a}$$

Przykład. W doświadczeniu rejestrowano cząstki z rozpadu preparatu promieniotwórczego. Na początku eksperymentu zarejestrowano 723 zliczenia w ciągu 15 s, a na jego końcu 19 zliczeń w tym samym czasie. Bieg własny detektora (tło) zarejestrowano oddzielnie z dużą dokładnością i w przeliczeniu na 15 s wynosi ono 14,2 zliczenia z zaniedbywalnie małą niepewnością.

Wiadomo, że liczby zliczeń w tego typu doświadczeniu podlegają rozkładowi Poissona, zatem estymatorem odchylenia standardowego i niepewności standardowej jest pierwiastek liczby zliczeń. Wyniki pomiarów można przedstawić następująco:

$$x_1 = 723,\ u(x_1) = \sqrt{723} = 26{,}9$$

$$x_2 = 19,\ u(x_2) = \sqrt{19} = 4{,}36$$

$$b = 14{,}2,\ u(b) = 0$$

Po uwzględnieniu tła wyniki skorygowane są następujące:

$$N_1 = x_1 - b = 723 - 14{,}2 = 708{,}8$$

$$u(N_1) = u(x_1) = 26{,}9$$

$$N_2 = x_2 - b = 19 - 14{,}2 = 4{,}8$$

$$u(N_2) = u(x_2) = 4{,}36$$

Po uwzględnieniu reguły podawania dwóch cyfr znaczących niepewności wyniki zapisujemy w postaci:

$$N_1 = 709,\ u(N_1) = 27$$

$$N_2 = 4{,}8,\ u(N_2) = 4{,}4$$

Względne niepewności standardowe wynoszą w tym przykładzie

$$u_r(N_1) = \frac{26{,}9}{708{,}8} = 0{,}038 = 3{,}8\%$$

$$u_r(N_2) = \frac{4{,}36}{4{,}8} = 0{,}91 = 91\%$$

Ważona suma i różnica

y jest ważoną sumą x_1 i x_2 jeżeli

$$y = ax_1 \pm bx_2$$

Pochodne cząstkowe są odpowiednimi stałymi

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a\,,\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = \pm b$$

co prowadzi do:

$$u^2(y) = a^2 u^2(x_1) + b^2 u^2(x_2) \pm 2abu(x_1, x_2)$$

Przykład. Doświadczenie jak poprzednie z tym, że wartość tła detektora otrzymano w jednym 15 sekundowym pomiarze, który dał wynik 14 zliczeń. W tym przypadku wyniki pomiarów można przedstawić następująco:

$$x_1 = 723,\ u(x_1) = \sqrt{723} = 26{,}9$$

$$x_2 = 19,\ u(x_2) = \sqrt{19} = 4{,}36$$

$$b = 14,\ u(b) = \sqrt{14} = 3{,}74$$

Po skorygowaniu wartości wyniosą odpowiednio

$$N_1 = x_1 - b = 723 - 14 = 709$$

$$u(N_1) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(b)} = \sqrt{723 + 14} = 27{,}1$$

$$N_2 = x_2 - b = 19 - 14 = 5$$

$$u(N_2) = \sqrt{u^2(x_2) + u^2(b)} = \sqrt{19 + 14} = 5{,}74$$

a ostatecznie

$$N_1 = 709\,,\ u(N_1) = 27$$

$$N_2 = 5{,}0\,,\ u(N_2) = 5{,}7$$

W tym przykładzie względne niepewności standardowe wynoszą

$$u_r(N_1) = \frac{27{,}1}{709} = 0{,}038$$

$$u_r(N_2) = \frac{5{,}74}{5} = 1{,}1$$

Mnożenie i dzielenie

y jest ważonym iloczynem x_1 i x_2 jeżeli

$$y = \pm a x_1 x_2$$

Pochodne cząstkowe są równe odpowiednio

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \pm a x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \pm a x_1$$

co prowadzi do:

$$u^2(y) = a^2 x_2^2 u^2(x_1) + a^2 x_1^2 u^2(x_2) + 2a^2 x_1 x_2 u(x_1, x_2)$$

albo

$$\frac{u^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + 2\frac{u(x_1, x_2)}{x_1 x_2}$$

Podobnie, jeżeli y jest otrzymane w wyniku dzielenia x_1 i x_2, to

$$y = \pm \frac{a x_1}{x_2}$$

i związek między niepewnościami ma postać

$$\frac{u^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} - 2\frac{u(x_1, x_2)}{x_1 x_2}$$

Przykład. Zmierzono długości podstawy i wysokości trójkąta otrzymując

$$b = 5{,}0\,\mathrm{cm}\,,\ u(b) = 0{,}1\,\mathrm{cm}$$

$$h = 10{,}0\,\mathrm{cm}\,,\ u(h) = 0{,}3\,\mathrm{cm}$$

Pole trójkąta wynosi

$$A = \frac{bh}{2} = 25{,}0\,\mathrm{cm}$$

a względna niepewność standardowa wartości pola

$$u_r(A) = \frac{u(A)}{A} = \sqrt{\frac{u^2(b)}{b^2} + \frac{u^2(h)}{h^2}}$$

albo

$$u(A) = A\sqrt{\frac{u^2(b)}{b^2} + \frac{u^2(h)}{h^2}}$$

$$= 25\,(\mathrm{cm}^2)\sqrt{\left(\frac{0{,}1}{5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}3}{10}\right)^2}$$

$$= 0{,}90\,\mathrm{cm}^2$$

Potęgowanie

$$y = ax^{\pm b}$$

Pochodna y względem x wynosi

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm abx^{\pm b-1} = \pm\frac{by}{x}$$

Przykład. Pole koła jest proporcjonalne do kwadratu promienia $A = \pi \cdot r^2$. Jeżeli promień wyznaczono na $r = 10{,}0\ \mathrm{cm}$ z niepewnością $u(r) = 0{,}3\,\mathrm{cm}$, to pole wynosi

$$A = 100\pi\ \mathrm{cm}^2$$

ze względną niepewnością standardową wynoszącą

$$u_r(A) = 2\frac{u(r)}{r} = 2\frac{0{,}3}{10{,}0} = 6{,}0\%$$

albo

$$u(A) = 2A\frac{u(r)}{r} = 2\pi(10{,}0\ \mathrm{cm})^2\,\frac{0{,}3}{10{,}0} = 6\pi\ \mathrm{cm}^2$$

Zależność wykładnicza

$$y = c\, e^{\pm bx}$$

Pochodna y względem x wynosi

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm c\, b\, e^{\pm bx} = \pm b\, y$$

W tym przypadku niepewność względna wynosi

$$u_r(y) = \frac{u(y)}{y} = b\, u(x)$$

Jeżeli stała podnoszona do potęgi jest różna od e to funkcję można przekształcić

$$y = c\, a^{\pm bx} = c\left(e^{\ln a}\right)^{\pm bx} = c\, e^{\pm (b \ln a) x}$$

otrzymując podobnie jak poprzednio

$$u_r(y) = \frac{u(y)}{y} = (b \ln a)\, u(x)$$

Zależność logarytmiczna

$$y = a \ln(bx)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{x}$$

i

$$u(y) = a \frac{u(x)}{x} = a\, u_r(x)$$