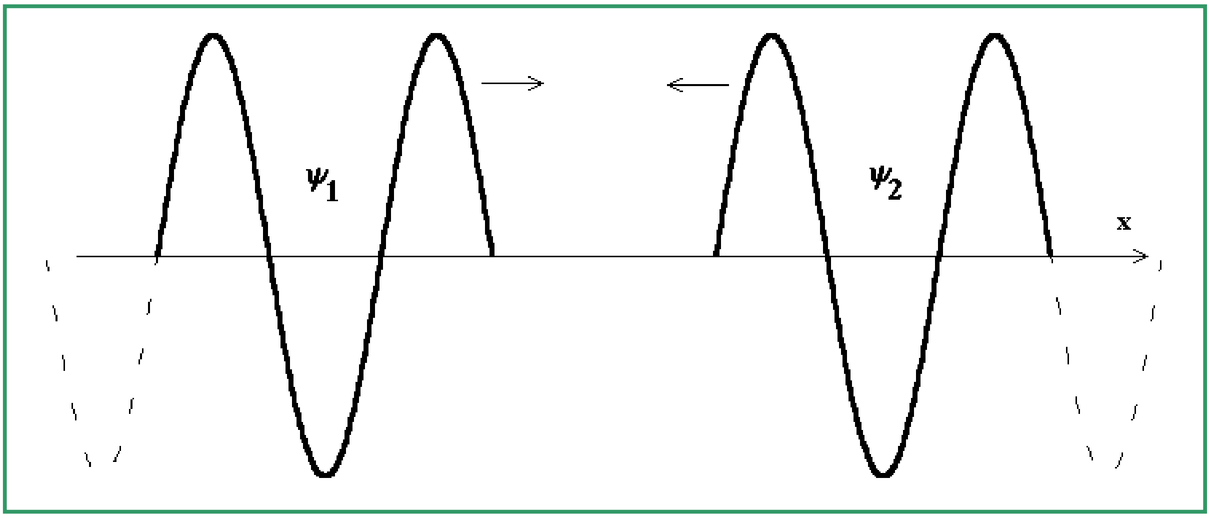
15. Nakładanie się i interferencja fal

Weźmy pod uwagę falę jednowymiarową biegnącą w kierunku osi x

$$\psi_1(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

oraz taką samą falę biegnącą w kierunku przeciwnym

$$\psi_2(x,t) = A \cdot \sin(kx + \omega t).$$



W wyniku superpozycji (nałożenia się) fal otrzymujemy falę wypadkową

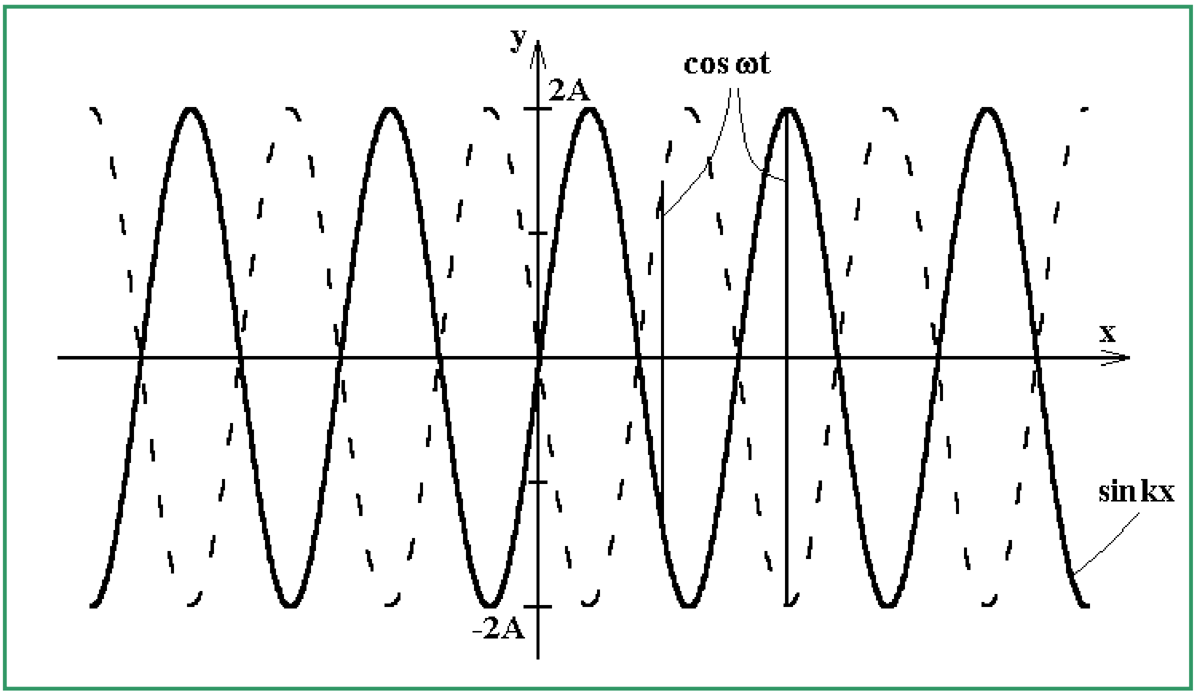
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cdot (\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)).$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

i ostatecznie

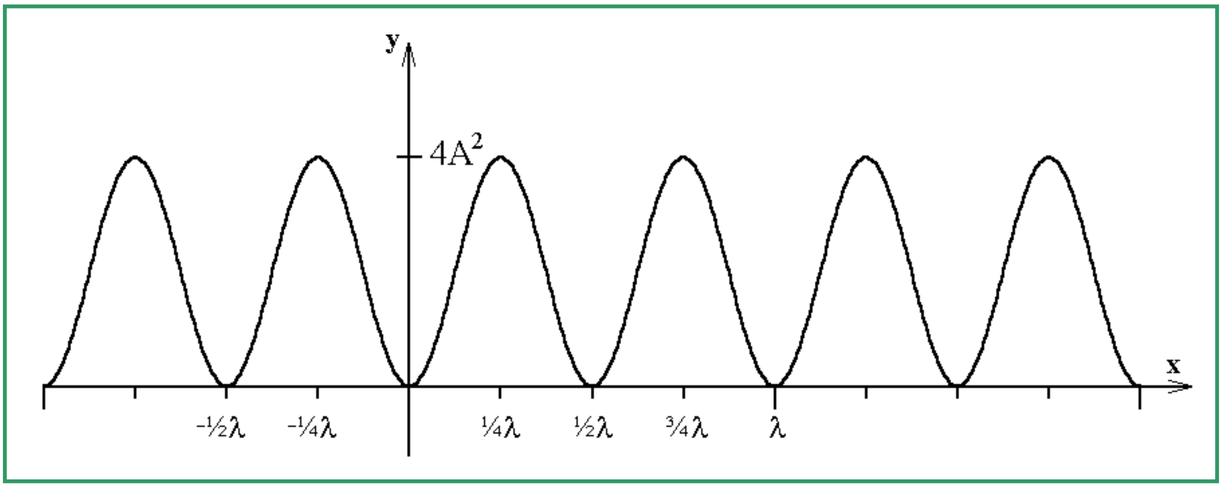
$$\boxed{\psi(x,t) = \underbrace{2A\sin(kx)}_{\text{amplitude}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{drgan z czestoscia } \omega}}$$



Amplituda drgań wypadkowych zależy od położenia x – inaczej niż dla fali biegnącej – zmieniając się od zera do $2A$.

Drgania odbywające się w różnych miejscach różnią się fazą o π lub wcale.
Tego rodzaju ruch w ośrodku nazywa się <u>falą stojącą</u>.

Kwadrat amplitudy fali stojącej jest proporcjonalny do energii drgań elementów ośrodka.



Miejsca zerowe $\sin(kx) = 0$, o zerowej amplitudzie drgań, nazywają się <u>węzłami fali stojącej</u>.
Miejsca ekstremów $\sin(kx) = \pm 1$, o maksymalnej amplitudzie drgań, nazywają się <u>strzałkami fali stojącej</u>.

Sąsiednie strzałki (lub węzły) fali stojącej dzieli odległość

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}.$$

Dudnienia

Jeżeli nakładające się fale różnią się nieco długością

$$\sin(k_1 x + \omega_1 t) + \sin(k_2 x + \omega_2 t),$$

to w yniku nałożenia otrzymujemy:

$$2\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

$$\underbrace{2\sin(\bar{k}\cdot x + \Delta\omega\cdot t)}_{\text{wolnozmienna amplituda}}\cdot\underbrace{\cos(\Delta k\cdot x + \bar{\omega}\cdot t)}_{\text{drgan o czestosci } \bar{\omega}}$$

Kiedy $\Delta k = \Delta\omega = 0$ to mamy do czynienia z interferencją.

Interferencja fal na płaszczyźnie

Fala kolista ze źródła punktowego ma postać:

$$A \cdot \sin(kr - \omega t) = A \cdot \sin 2\pi(\frac{r}{\lambda} - \nu t).$$

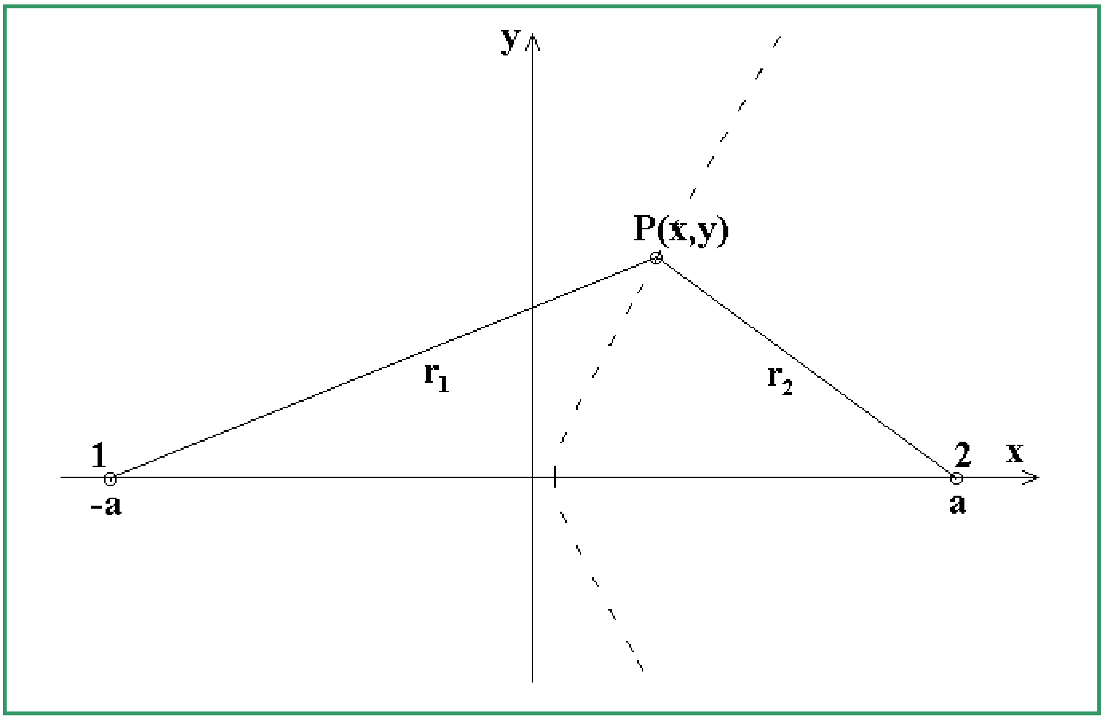
W punktach $(a,0)$ i $(-a,0)$ są źródła punktowe fal kolistych z_1 i z_2:

$$z_1 = A \cdot \sin 2\pi(\frac{r_1}{\lambda} - \nu t) \qquad z_2 = A \cdot \sin 2\pi(\frac{r_2}{\lambda} - \nu t).$$

Wypadkowy ruch w ośrodku jest sumą drgań wywołanych przez każdą z fal z osobna

$$z = z_1 + z_2$$

$$z = \underbrace{2A \cdot \cos 2\pi(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda})}_{\text{amplituda wypadkowa}} \cdot \underbrace{\sin 2\pi(\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} - \nu t)}_{\text{drgan o czestotliwosci } \nu}$$



Jeżeli $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, to amplituda drgań wypadkowych jest równa zero.

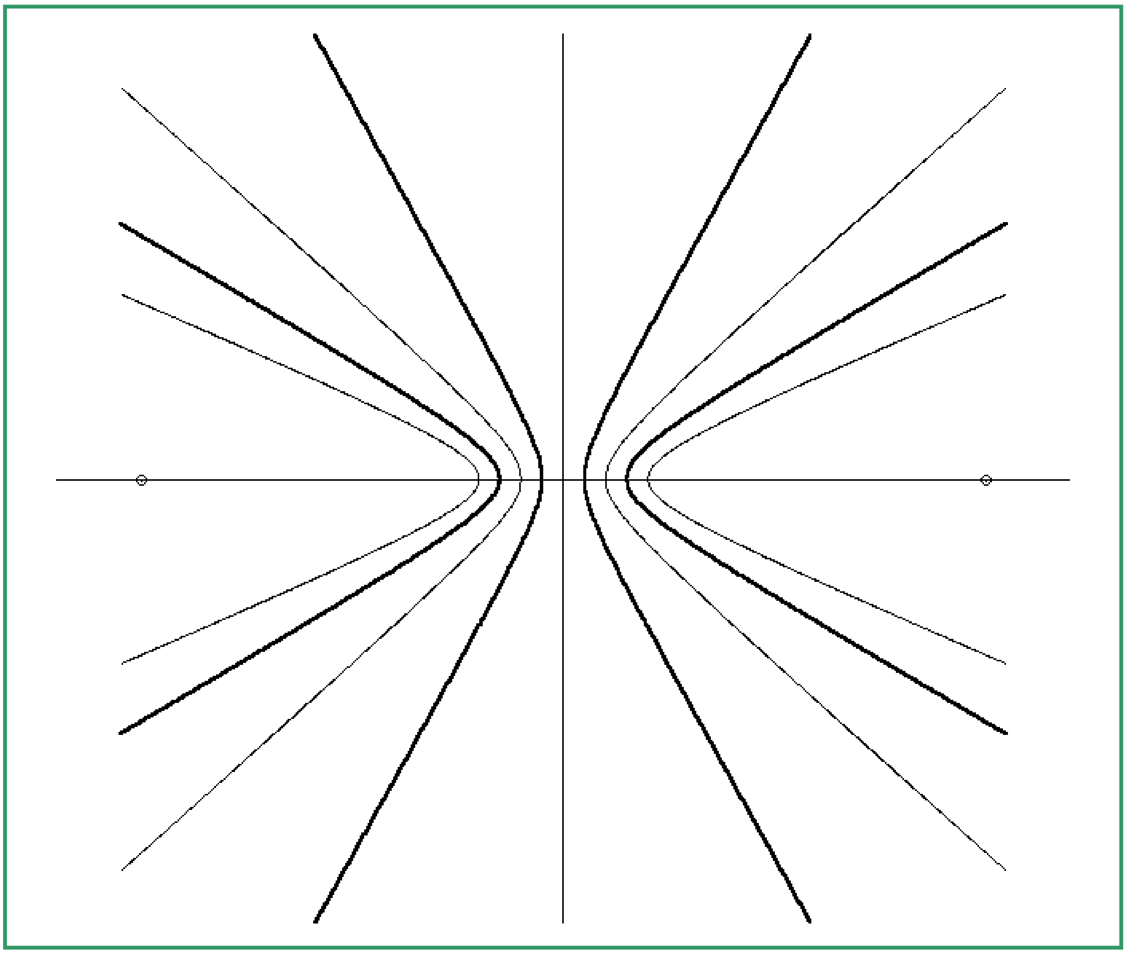
Jeżeli $r_1 - r_2 = n\lambda$, to amplituda drgań wypadkowych jest maksymalna.

Równanie $r_1 - r_2 = const$ jest równaniem hiperboli o ogniskach w $(a,0)$ i $(-a,0)$.
Równania hiperbol, wzdłuż których występują maksima amplitudy drgań wypadkowych wyglądają następująco:

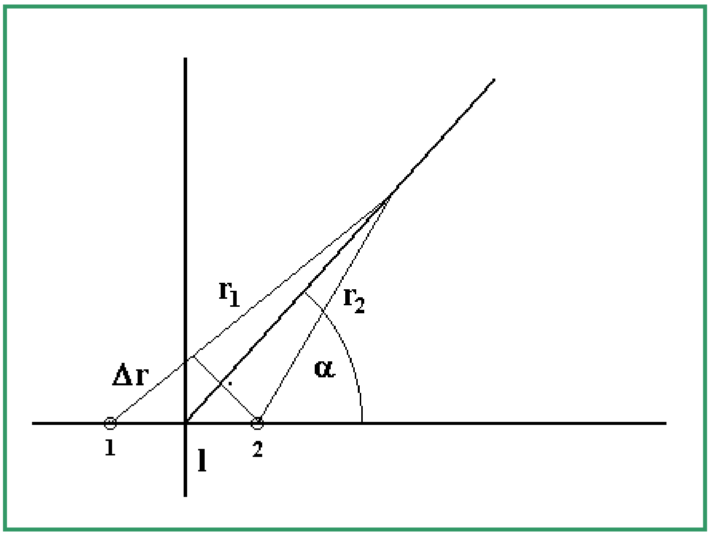
$$r_1 - r_2 = n\lambda \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = n\lambda$$

$$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2\lambda^2 + \frac{16a^2x^2}{n^2\lambda^2} - 4(a^2 + x^2)}$$



Dla $n = 0$ otrzymujemy równanie osi y.



W dużych odległościach od źródeł, tzn. dla $r_1, r_2 >> l$, mamy

$$\Delta r = n\lambda \approx l\cos\alpha \quad \text{albo} \quad \lim_{r\to\infty} \cos\alpha = \frac{n\lambda}{l}$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{kierunek głównego maksimum}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{\lambda}{l} \\ \cos\alpha_2 &= \frac{2\lambda}{l} \\ \cos\alpha_3 &= \frac{3\lambda}{l} \end{aligned}\right\} \quad \text{maksima interferencyjne rzędu } n$$

Kąty α_n określają zarazem kierunki asymptot hiperbol.
W tych kierunkach, w wyniku interferencji, rozchodzi się fala o maksymalnej amplitudzie.
Wprowadźmy różnicę faz między źródłami fal. Wtedy

$$z = z_1 + z_2 = 2A\cdot\cos 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda} - \frac{\varphi_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} - vt + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Warunkim na maksimum amplitudy jest $\frac{r_1 - r_2}{\lambda} - \varphi_0 = n$, i dla $n = 0$

$\cos\alpha_0 = \frac{\lambda}{l}\varphi_0$, czyli zmienia się kierunek, w którym występuje maksimum interferencyjne amplitudy fali.