14. Ruch falowy

Ruch falowy polega na rozchodzeniu się zaburzenia (odkształcenia) w ośrodku sprężystym.

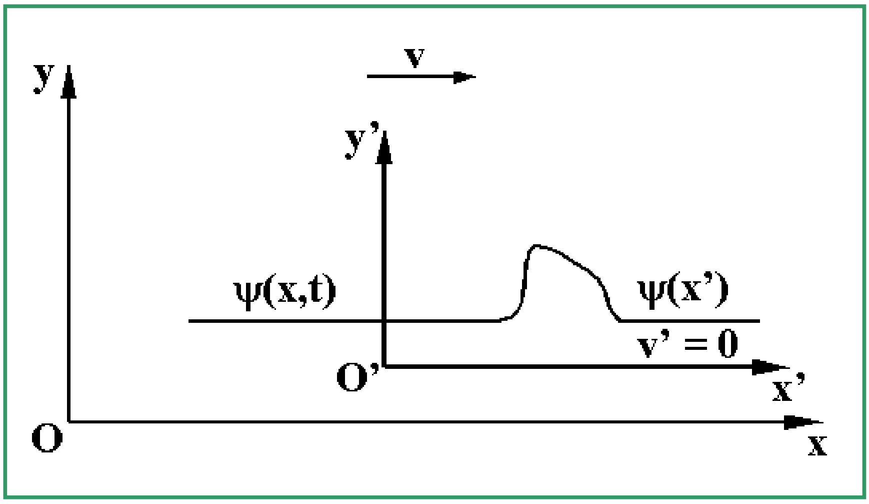
Wielkość zaburzenia ψ jest, podobnie jak w przypadku drgań, funkcją czasu

$$\psi = \psi(t)$$

Zaburzenie rozchodzi się w przestrzeni z określoną prędkością nazywaną prędkością fali. Zatem wielkość zaburzenia jest również funkcją położenia

$$\psi = \psi(\vec{r}, t).$$

Dla danego miejsca $\vec{r}_0$ funkcja $\psi(\vec{r}_0, t)$ przedstawia zależność zaburzenia od czasu lub inaczej drgania ośrodka w tym miejscu. Dla danej chwili t_0 funkcja $\psi(\vec{r}, t_0)$ przedstawia przestrzenny rozkład zaburzenia – migawkowe zdjęcie stanu ośrodka.



Weźmy pod uwagę falę, która w jednowymiarowym ośrodku rozchodzi się wzdłuż osi Ox z prędkością v

$$\psi = \psi(x, t).$$

Zmieniamy układ na poruszający się z tą samą prędkością co zaburzenie. W nowym układzie zaburzenie jest stacjonarne, nie zależy od czasu:

$$\psi = \psi(x').$$

Transformacja Galileusza daje związek między współrzędnymi w obu układach

$$x' = x - v \cdot t\,.$$

Wracając do układu wyjściowego (w którym zaburzenie rozchodzi się) otrzymujemy

$$\psi = \psi(x - v \cdot t)\,.$$

Jest to w dalszym ciągu funkcja położenia i czasu, tyle, że nie dowolna, ale zależna od ich specjalnej kombinacji.

Funkcję $\psi = \psi(x - v \cdot t)$ nazywa się (jednowymiarową) funkcją falową.

W przypadku wielowymiarowym funkcja falowa ma postać

$$\boxed{\psi = \psi(\vec{r} - \vec{v} \cdot t)}$$

Otrzymamy teraz równanie różniczkowe ruchu falowego.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \qquad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial x'} \qquad \frac{\partial x'}{\partial t} = -v$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial x'}{\partial t} \end{matrix}\right\} \text{pochodne wewnętrzne}$$

Czyli $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial x}$ (a dla ruchu w przeciwnym kierunku wystarczy zmienić znak v).

Powtórne różniczkowanie daje

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

albo po przekształceniu otrzymujemy ostatecznie równanie różniczkowe ruchu falowego.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}$$

Ze względu na sposób jego otrzymania, każda funkcja typu $\psi = \psi(x \pm v \cdot t)$ spełnia to równanie.

Można się przekonać, że rozwiązania różniczkowego równania ruchu falowego spełniają zasadę superpozycji, tzn., jeżeli $\psi_1 = \psi_1(x \pm v \cdot t)$ i $\psi_2 = \psi_2(x \pm v \cdot t)$ są funkcjami falowymi spełniającymi równanie ruchu falowego

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$$

i

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2},$$

to ich suma $\psi = \psi_1 + \psi_2$ też jest rozwiązaniem tego równania

$$\frac{\partial^2 (\psi_1 + \psi_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 (\psi_1 + \psi_2)}{\partial t^2}.$$

Wynika to wprost z faktu, że operacja różniczkowania jest rozdzielna względem dodawania funkcji.

Zasadę superpozycji można rozszerzyć na dowolną liczbę funkcji falowych. Jeżeli $\psi_1 = \psi_1(x - v \cdot t)$, $\psi_2 = \psi_2(x - v \cdot t)$, ... $\psi_n = \psi_n(x - v \cdot t)$ są funkcjami falowymi, to ich dowolna kombinacja liniowa

$$\boxed{\psi(x - v \cdot t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i (x - v \cdot t)} \qquad c_i \text{ – dowolne stałe}$$

jest też funkcją falową, czyli spełnia odpowiednie równanie różniczkowe.

Fale harmoniczne

Jeżeli funkcja falowa ma postać

$$\psi(x,t) = A \cdot \sin[k(x \pm v \cdot t)]$$

lub

$$\psi(x,t) = A \cdot \cos[k(x \pm v \cdot t)]$$

to nazywamy ją harmoniczną.
Dla ustalonego miejsca, np. $x = 0$

$$\psi(0,t) = A \cdot \sin[k(\pm v \cdot t)] = \pm A \cdot \sin(k \cdot v \cdot t)$$

staje się ona funkcją opisującą drgania harmoniczne o częstości kołowej

$$\omega = k \cdot v \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT}$$

gdzie: T jest okresem tych drgań.
Dla ustalonej chwili, np. $t = 0$

$$\psi(x,0) = A \cdot \sin(k \cdot x) = A \cdot \sin(\frac{2\pi}{v \cdot T} x)$$

otrzymujemy funkcję przestrzenną okresową o okresie równym $v \cdot T$.
Iloczyn $v \cdot T$ nazywa się <u>długością fali</u> λ a T <u>okresem fali</u>. Zachodzi między nimi związek:

$$\boxed{\lambda = v \cdot T}$$

Użyta wcześniej wielkość k

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

nazywa się <u>liczbą falową</u> (ma wymiar m^{-1}).
W tym wypadku ω nazywamy <u>częstością kołową fali</u> i możemy dopisać kolejny związek

$$\boxed{\omega = k \cdot v}$$

<u>Prędkość fazowa fali</u>

Podobnie jak dla drgań harmonicznych, argument harmonicznej funkcji falowej

$$\psi(x,t) = A \cdot \sin[k(x - v \cdot t)] = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

nazywa się fazą fali

$$\varphi = kx - \omega t\,.$$

W ogólnym przypadku możemy mieć do czynienia z różną od zera fazą początkową

$$\varphi = kx - \omega t + \varphi_0\,.$$

Pochodna fazy względem czasu daje, z dokładnością do znaku, częstość kołową fali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega\,,$$

a względem położenia – liczbę falową

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Ich stosunek

$$-\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}} = -\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = v$$

jest prędkością fali. Prędkość fali, którą wprowadziliśmy na samym początku, była prędkością z jaką przemieszczała się określona faza fali (w układzie poruszającym się z prędkością v faza w danym punkcie jest stała). Dlatego prędkość tę nazywamy <u>prędkością fazową fali</u>.

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$$

lub

$$v_f = \frac{\lambda}{T}\,.$$

Fale przestrzenne

$$\psi(\vec{r},t) = A \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega \cdot t)$$

$\vec{k}$ - wektor falowy
Kierunek wektora falowego pokrywa się z kierunkiem rozchodzenia się fali, a jego długość wynosi

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Punkty w przestrzeni, w których faza fali ma określoną wartość

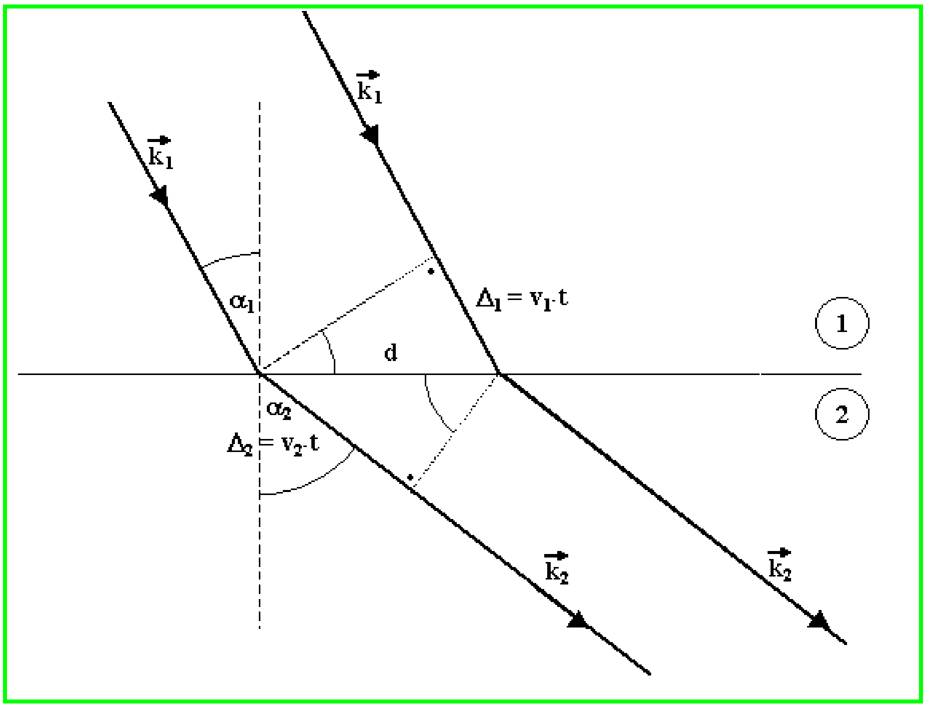
$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega \cdot t = const$$

tworzą <u>powierzchnie falowe</u> (albo fazowe). Wektor $\vec{k}$ jest w każdym punkcie powierzchni falowej prostopadły do niej.

Ze względu na kształt powierzchni falowych mówimy o falach płaskich, kulistych, walcowych, itp.

Odbicie i załamanie fal

Załamanie fali na granicy dwóch ośrodków



$$v_1 > v_2$$

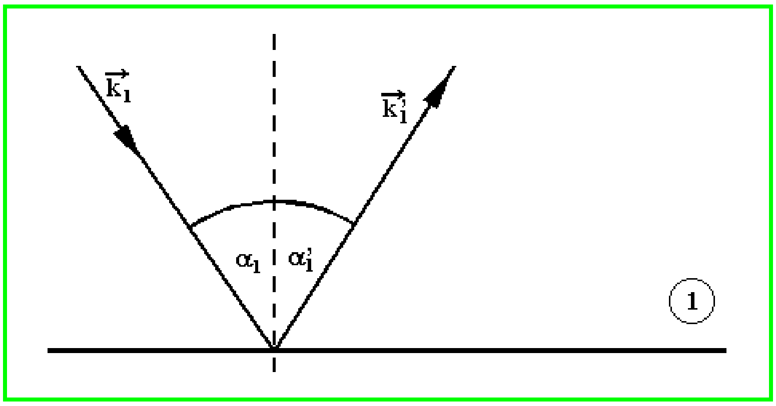
$$\sin\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{d} = \frac{v_1 t}{d}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\Delta_2}{d} = \frac{v_2 t}{d}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

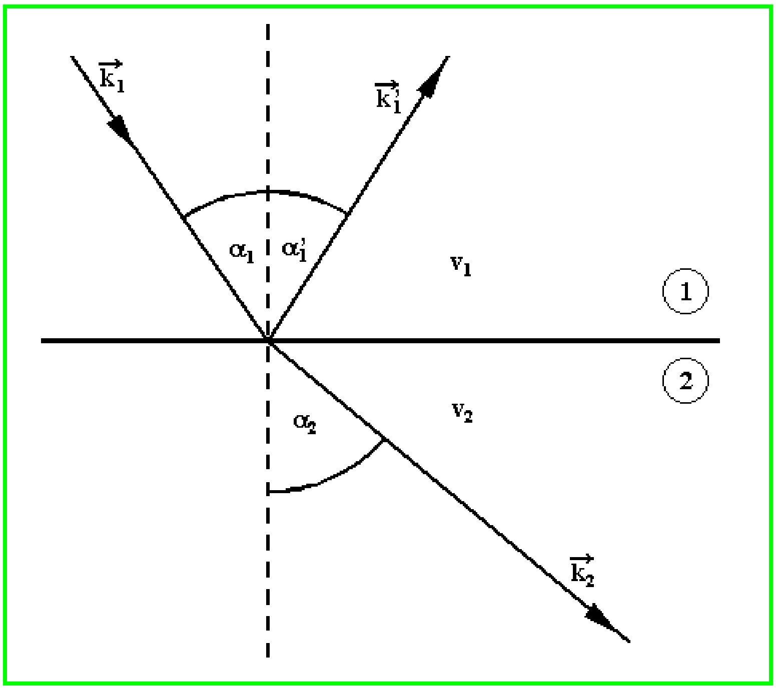
Przy przejściu do innego ośrodka zmienia się prędkość fali i jej długość, nie zmienia się natomiast częstotliwość fali.

Odbicie fali od granicy ośrodka



$$\alpha_1 = \alpha'_1$$

Odbicie i załamanie na granicy dwóch ośrodków



$$\alpha_1 = \alpha'_1$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

<u>Prawo odbicia</u>

Wektor $\vec{k}_1$ fali padającej, wektor $\vec{k}_1'$ fali odbitej i normalna do powierzchni granicznej w miejscu odbicia leżą w jednej płaszczyźnie, i kąt padania jest równy kątowi odbicia

$$\alpha_1 = \alpha'_1 .$$

<u>Prawo załamania (Snelius'a)</u>

Wektor $\vec{k}_1$ fali padającej, wektor $\vec{k}_2$ fali załamanej i normalna do powierzchni granicznej w miejscu załamania leżą w jednej płaszczyźnie, i

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n_{12} .$$

Jeżeli $v_2 > v_1$, to jest taki graniczny kąt padania $\alpha_1 = \alpha_{gr}$ $(\sin\alpha_{gr} = n_{12})$, że kąt załamania jest prosty $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ i zaburzenie rozchodzi się wzdłuż granicy między ośrodkami. Dla kątów padania $\alpha_1 > \alpha_{gr}$ fala nie przenika do drugiego ośrodka, ale ulega <u>całkowitemu wewnętrznemu odbiciu</u> na granicy.

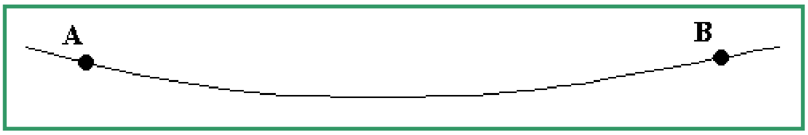
Prawa odbicia i załamania fal można wyprowadzić z bardzo ważnej zasady dotyczącej ruchu falowego – zasady Fermata.

Zaburzenie (fala) rozchodzi się w ośrodku po takiej drodze, że czas przejścia między dwoma punktami jest ekstremalny – zwykle minimalny.

Linię, która jest w każdym punkcie styczna do wektora falowego $\vec{k}$ (albo prostopadła do powierzchni falowej) nazywamy promieniem fali. Można powiedzieć, że zaburzenie, rozchodzące się w ośrodku w postaci fali, przemieszcza się wzdłuż promieni tej fali.

W ośrodkach jednorodnych, gdzie $v = \mathrm{const}$, promienie fali są liniami prostymi. Na granicy takich ośrodków promienie załamują się – zmieniają kierunek.

W ośrodkach niejednorodnych prędkość fali nie jest stała $v = v(\vec{r})$ a promienie przestają być liniami prostymi.



W prawie wszystkich ośrodkach prędkość fali zależy od jej długości (częstotliwości) $v = v(k)$, a w ośrodkach anizotropowych (np. w kryształach) występuje też zależność prędkości od kierunku rozchodzenia się $v = v(\vec{k})$ lub od kierunku polaryzacji fali (dla fal poprzecznych).

W pierwszym przypadku mówimy o dyspersji fal – fale o różnych długościach (częstotliwościach) biegną z różnymi prędkościami.

W ośrodkach anizotropowych występuje dodatkowe zjawiska: dwójłomności, polaryzacji.