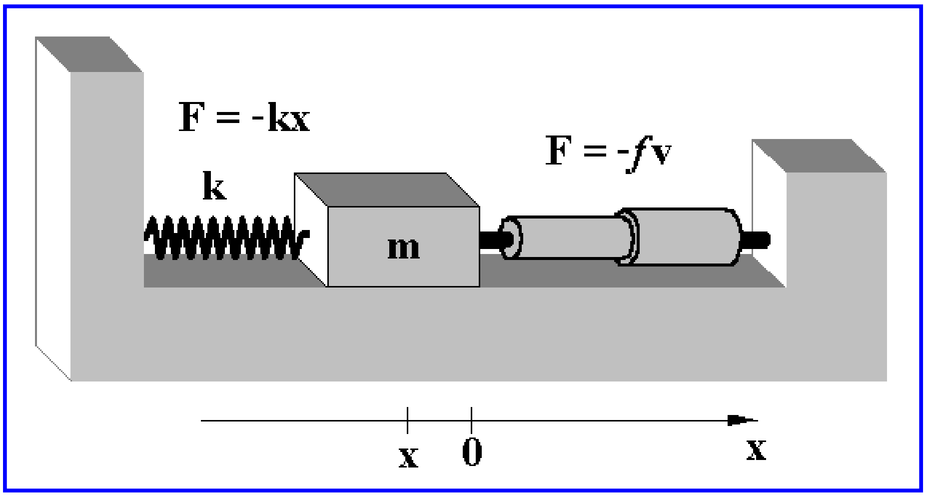
12. Ruch drgający tłumiony

W rzeczywistości oprócz siły sprężystości działają jeszcze siły oporu, rozpraszające energię drgań i powodujące zmniejszanie się amplitudy drgań. W przypadku ruchu w ośrodku lepkim, np. powietrze, ciecz, występuje tłumienie czyli siła oporu proporcjonalna do prędkości i przeciwnie skierowana.



$$\vec{F} = -f \cdot \vec{v}$$

f – współczynnik oporu lepkiego

$$F = -f \frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - f\frac{dx}{dt}$$ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ częstość drgań swobodnych

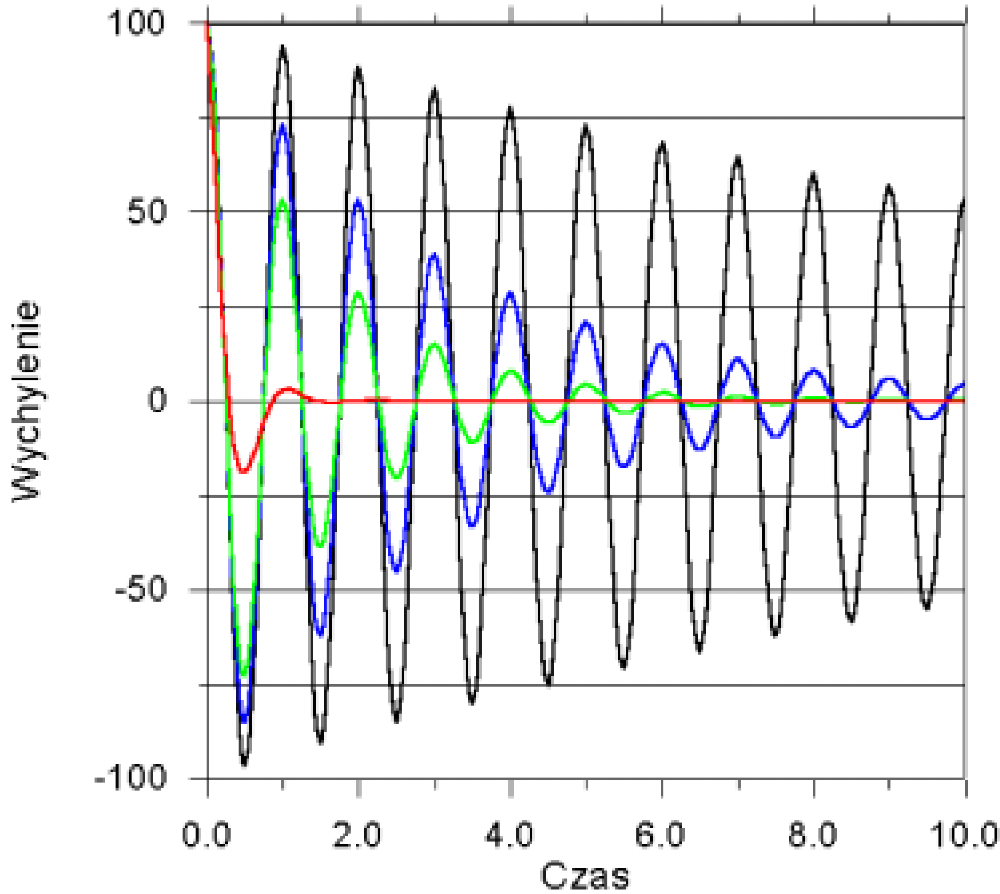
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$ $\frac{f}{2m} = \beta$ współczynnik tłumienia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$ równanie różniczkowe drgań tłumionych

Jeżeli $\beta < \omega_0$, to rozwiązanie ma postać

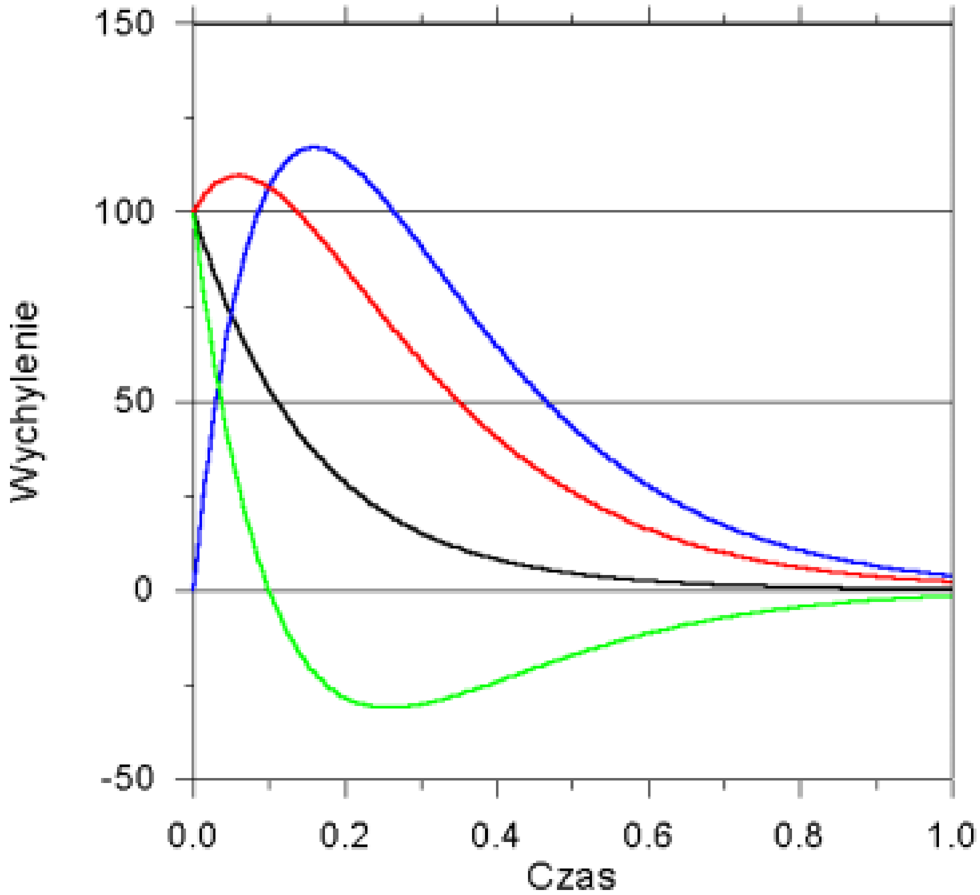
$$x = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.


100
50
0
-50
-100
Wychylenie
0.0
2.0
4.0
6.0
8.0
10.0
Czas

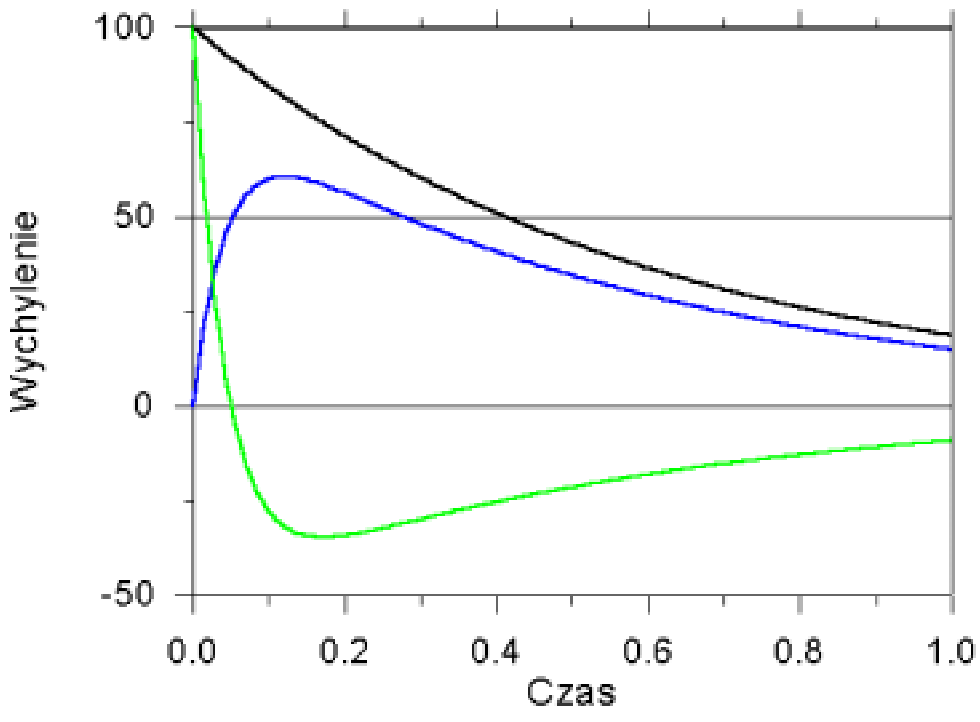
Dla $\beta = \omega_0$ mówimy o tłumieniu krytycznym

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta \cdot t}.$$



A dla $\beta > \omega_0$ mówimy o tłumieniu nadkrytycznym

$$x = (A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot t})e^{-\beta \cdot t}.$$



Funkcja $x = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ nie jest okresowa w ścisłym sensie.
Mimo to ω nazywamy częstością drgań tłumionych. Jest ona zawsze mniejsza od częstości drgań swobodnych tego samego układu (bez tłumienia). Dla ruchu słabo tłumionego ($\beta << \omega_0$) różnica ta jest bardzo mała i drgania są prawie okresowe.

Czynnik wykładniczy $e^{-\beta \cdot t}$ nosi nazwę czynnika tłumienia.
$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}$ jest wykładniczo malejącą amplitudą drgań. Logarytm stosunku dwu kolejnych amplitud nazywa się logarytmicznym dekrementem tłumienia:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln \frac{e^{-\beta \cdot t}}{e^{-\beta \cdot t} e^{-\beta \cdot T}} = \beta \cdot T$$

$$\boxed{\delta = \beta \cdot T = \frac{T}{2m} \cdot f}$$

Praktycznie wykorzystuje się pomiary logarytmicznego dekrementu tłumienia do wyznaczenia współczynnika oporu lepkiego *f*. W takim wypadku lepiej jest wyznaczyć δ ze stosunku amplitud rozdzielonych większą liczbą okresów

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)}$$

$$\boxed{f = \frac{2m}{nT} \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)}}$$

W przypadku słabego tłumienia wartość δ wyznaczyć można ze wzoru przybliżonego

$$\delta = \frac{\Delta A}{A}$$

gdzie ΔA jest stratą amplitudy na jeden okres.

13. Drgania wymuszone

Zajmujemy się teraz przypadkiem układu drgającego, który nie jest już odosobniony ale oddziałuje z otoczeniem. Oddziaływanie polega w tym przypadku na działaniu na układ drgający siły periodycznej o częstości Ω. W wyniku działania takiej siły układ wykonuje drgania o tej samej częstości Ω - drgania te nazywa się <u>drganiami wymuszonymi</u>.

W najprostszym przypadku siła zmienia się w czasie jak funkcja *sinus* lub *cosinus*.

$F = F_0 \sin(\Omega t)$ F_0 – amplituda siły; Ω – częstość siły

Równanie ruchu ma wtedy postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \sin(\Omega t) - k \cdot x - f\frac{dx}{dt}$$

lub

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \sin(\Omega t)},$$

gdzie $\frac{f}{2m} = \beta$.

Odpowiednimi rachunkami można sprawdzić, że szczególną funkcją spełniającą to równanie jest

$$x_1(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$

Pełne (ogólne) rozwiązanie równania różniczkowego drgań wymuszonych daje się przedstawić jako suma rozwiązania ogólnego równania drgań tłumionych

$$x_0(t) = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

i przedstawionego wcześniej rozwiązania szczególnego

$$x_1(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \varphi).$$

Pełne, ogólne rozwiązanie ma zatem postać:

$$\boxed{x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cdot \sin(\Omega t - \varphi)}$$

Z upływem czasu pierwszy składnik wykładniczo zanika (tzw. stan przejściowy) i pozostaje tylko drugi, przedstawiający drgania harmoniczne z częstością Ω (tzw. stan ustalony).

Amplituda i przesunięcie fazy drgań wymuszonych w stanie ustalonym wynoszą

$$\boxed{A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\ ; \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

Amplituda osiąga maksimum dla częstości Ω_r

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

wynoszące

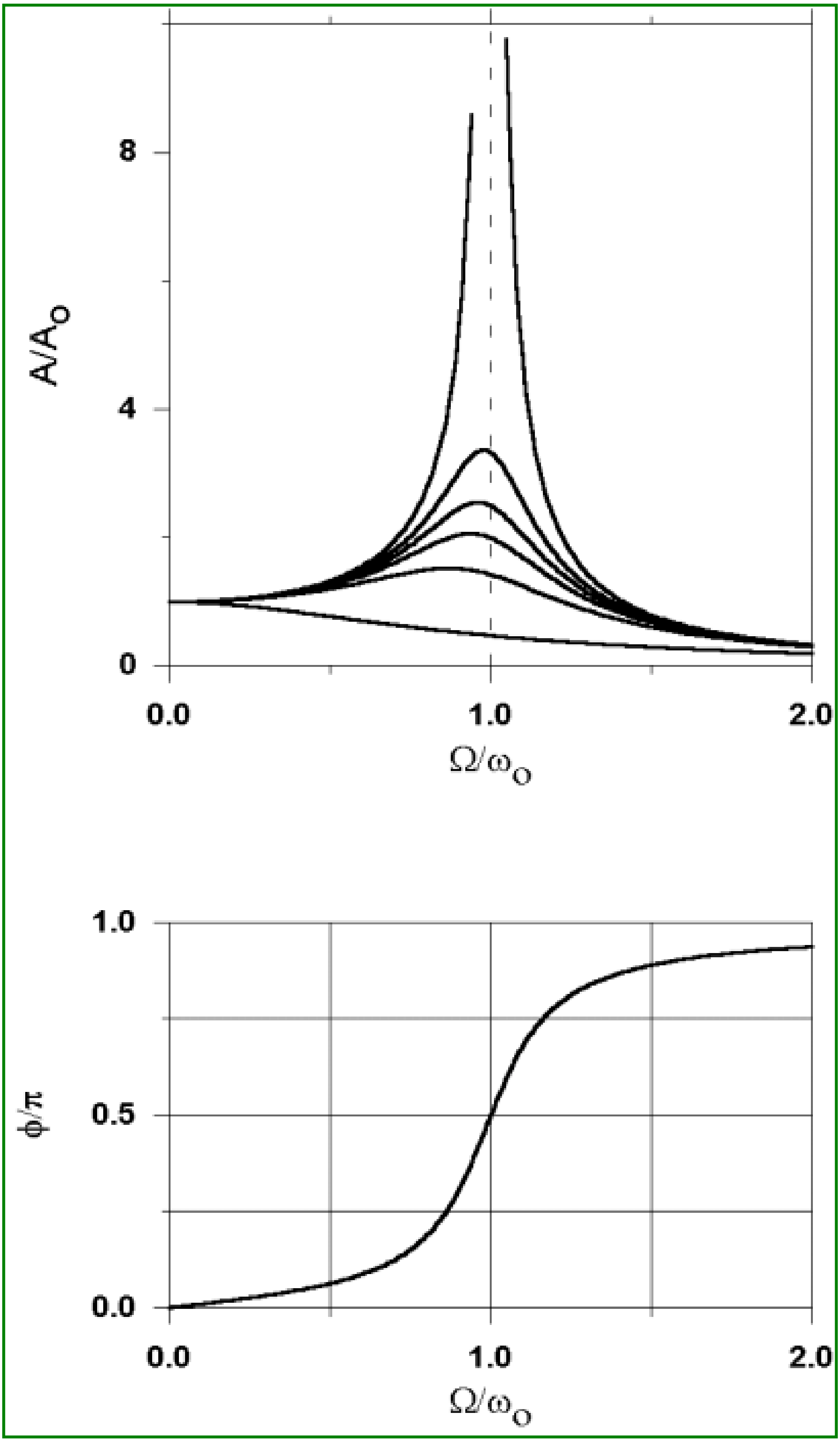
$$\boxed{A_r = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{f \cdot \omega}}$$

Przy słabym tłumieniu częstość rezonansowa Ω_r jest bardzo bliska częstości drgań własnych układu ω_0.

> Zjawisko narastania amplitudy drgań ustalonych przy częstości siły wymuszającej bliskiej częstości drgań własnych nazywa się rezonansem a częstość Ω_r – częstością rezonansową układu drgającego.

$A_0 = \frac{F_0}{k}$ – jest wychyleniem układu pod działaniem stałej siły F_0. (Ω = 0).

$$\boxed{\frac{A(\Omega)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\frac{\beta\,\Omega}{\omega_0^2}\right)^2}}}$$


8
4
0
A/A_O
0.0
1.0
2.0
Ω/ω_O
1.0
0.5
0.0
φ/π
0.0
1.0
2.0
Ω/ω_O