11. Ruch drgający

> Ciało jest sprężyste, jeżeli odzyskuje pierwotny kształt po ustaniu działania siły, która ten kształt zmieniła.

Właściwość sprężystości jest ograniczona, to znaczy, że przy bardzo dużych wartościach działającej siły (a dokładniej: naprężenia) odkształcenie staje się trwałe. Mówimy wtedy o plastyczności ciała. Jeszcze większe siły (naprężenia) mogą wywołać zniszczenie ciała (np. rozerwanie rozciąganego pręta).

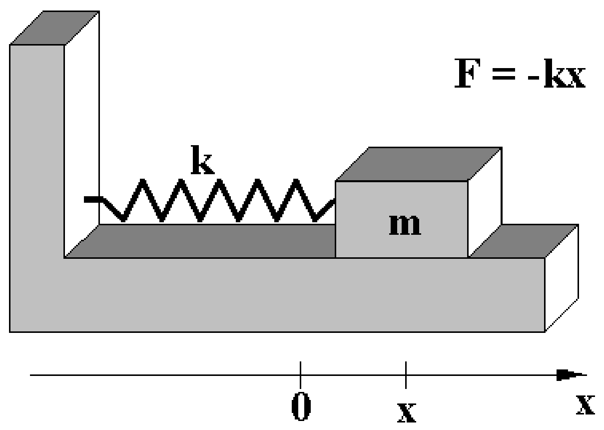
Prawo Hook'a wiąże wielkość siły i odkształcenia przez nią wywołanego. W przypadku liniowo rozciąganego pręta ma ono postać:

$$\boxed{F = k \cdot (l - l_0)}$$

Prawo Hook'a obowiązuje tylko w zakresie sprężystości (odkształceń odwracalnych). Stała k nazywa się współczynnikiem sprężystości i ma wymiar $\left[\frac{N}{m}\right]$.

Jeżeli do końca naciągniętej (ściśniętej) sprężyny przymocujemy ciało o masie m., to będzie na nie działała siła (III zasada dynamiki):

$$F = -k \cdot (l - l_0)$$



Położenie ciała będziemy określali względem położenia, w którym długość sprężyny wynosi l_0, np. $x = l - l_0$.

Wtedy

$$\boxed{F = -k \cdot x}$$ Siła harmoniczna

określa wielkość siły działającej na ciało w funkcji jego położenia.

Siłę, która w taki sposób zależy od położenia nazywamy siłą harmoniczną, a ruch jaki wykonuje ciało pod wpływem działania takiej siły nazywa się ruchem drgającym harmonicznym albo prostym.

Położenie, w którym sprężyna nie jest napięta ($F = 0$) nazywa się położeniem równowagi.

Jeżeli masę m przymocowaną do sprężyny przesuniemy do położenia x_0 i następnie w chwili $t = 0$ zwolnimy, to będzie ona wykonywała ruch drgający harmoniczny a położenie będzie zmieniało się w czasie zgodnie ze wzorem:

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad \text{gdzie } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Mówimy, że ciało wykonuje drgania wokół położenia równowagi.

Równanie toru ruchu harmonicznego wynika z II zasady dynamiki.

$$F = m \cdot a = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x,t) \quad \text{równanie różniczkowe ruchu}}$$

W naszym przypadku równanie ruchu ma postać następującą:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k \cdot x(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$$

równanie różniczkowe II stopnia (liniowe)

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)$	druga pochodna jest równa funkcji z przeciwnym znakiem

Oczywistą kandydatką na rozwiązanie takiego równania różniczkowego jest funkcja sinus lub cosinus. Sprawdzimy czy rzeczywiście tak jest.

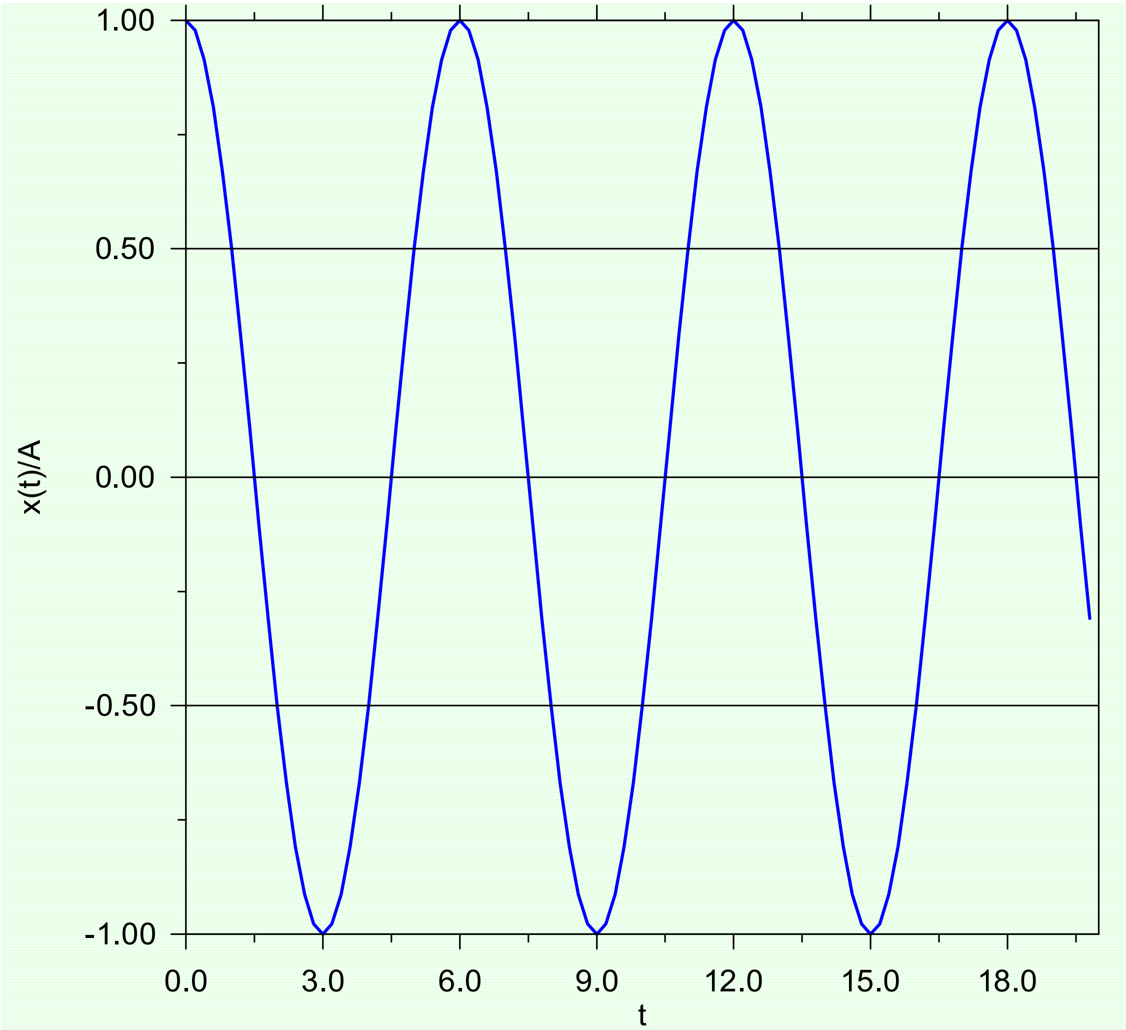
$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Czyli funkcja $x(t) = x_0 \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t)$ jest rozwiązaniem równania ruchu drgającego harmonicznego.

Wykres funkcji $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ dla $\omega = \frac{2\pi}{6}$ s^{-1}



W ogólnym przypadku masa m może się poruszać w chwili $t = 0$, wtedy

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}} \cdot t + \varphi_0)}$$

ogólne rozwiązanie równania różniczkowego

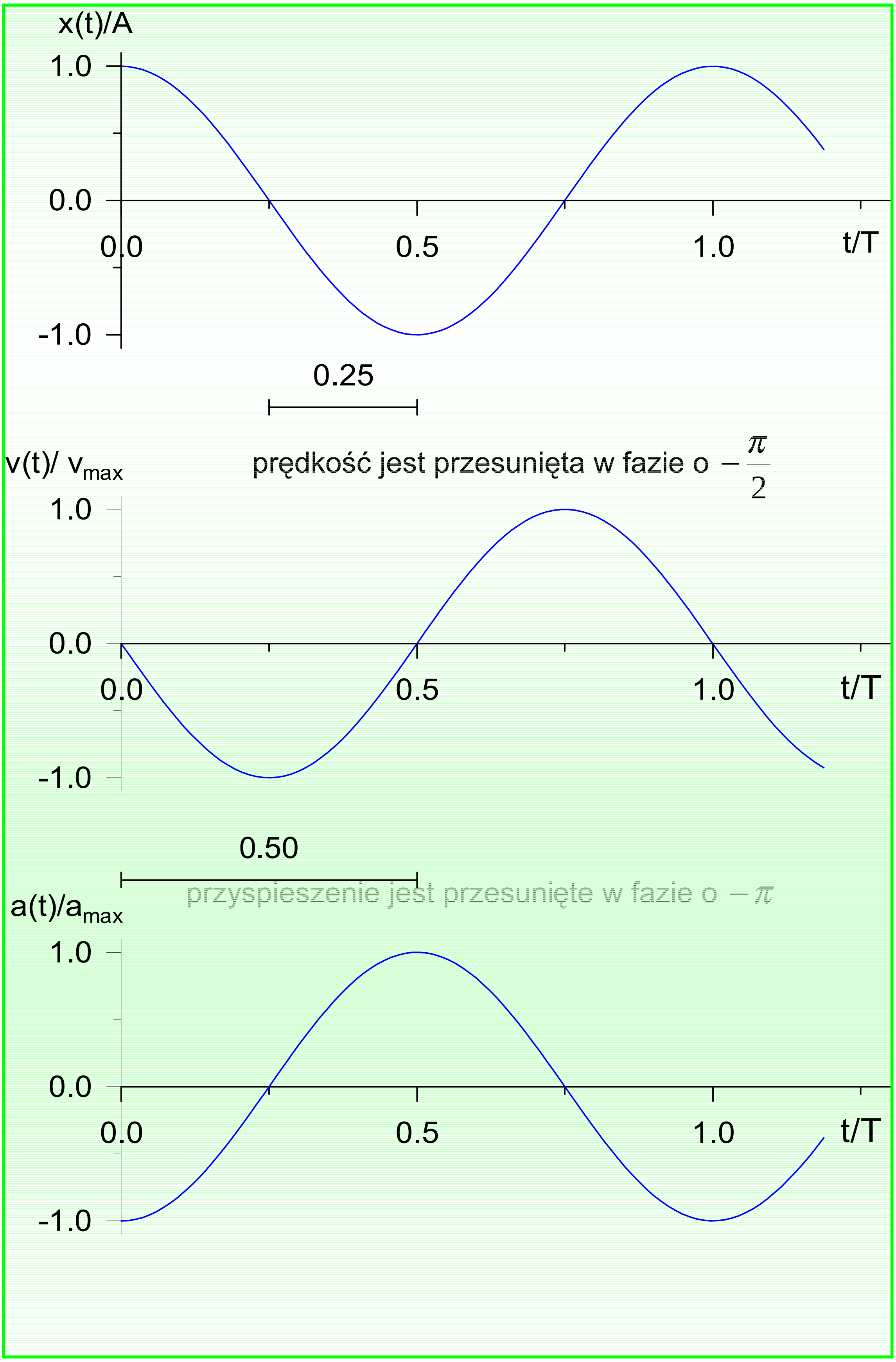
Gdzie stałe A i φ_0 mają wartości wynikające z warunków początkowych ruchu, tzn. wartości położenia i prędkości w chwili początkowej:

$$\begin{cases} x(t=0) \; = \; x_0 \\ v(t=0) \; = \; v_0 \end{cases}$$

Maksymalna wartość wychylenia z położenia równowagi wynosi A i nazywa się <u>amplitudą drgań</u>. Współczynnik ω nazywa się <u>częstością (kołową) drgań</u>. Wyrażenie $(\omega \cdot t + \varphi_0)$ nazywa się fazą drgań - φ_0 jest <u>fazą początkową drgań</u>.

Położenie, prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym

$$T \cdot \omega = 2\pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



Ponieważ okres funkcji *sinus* lub *cosinus* wynosi 2π, to okres drgań T spełnia zależność:

$$\omega \cdot T = 2\pi$$

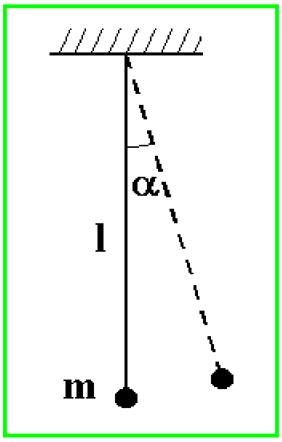
czyli

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{albo} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

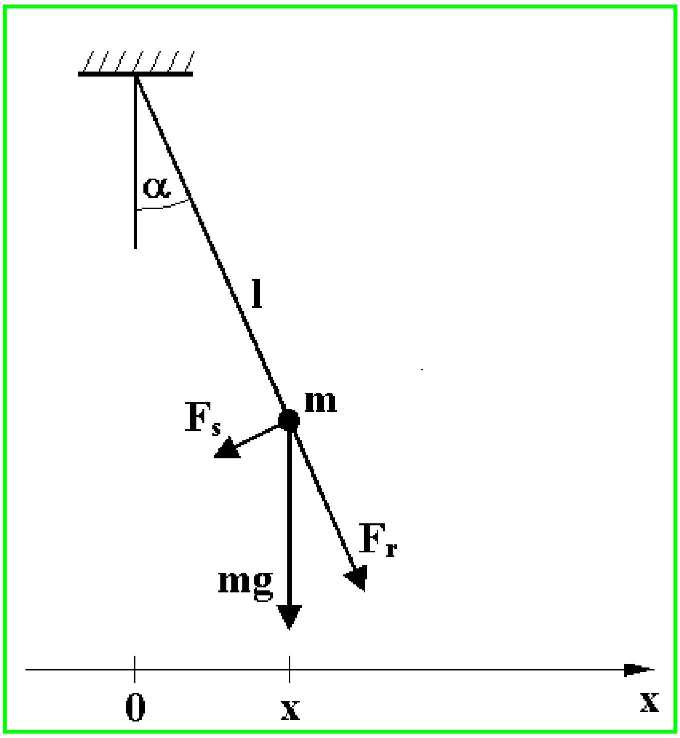
W rozważanym przykładzie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Małe drgania wokół położenia równowagi



Wahadło matematyczne – w położeniu równowagi masa m znajduje się pionowo pod punktem zaczepienia. Każde inne położenie nie jest trwałe. Siła jaka zawraca masę m do położenia równowagi jest wypadkową siły ciężkości i naprężenia nici.



$F_s = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ - siła zawracająca

$F_r = m \cdot g \cdot \cos\alpha$ - równoważona napięciem nici

Jeżeli amplituda drgań nie jest zbyt duża ($\alpha_{max} \leq 0{,}1$ (~6°)), to możemy zapisać następujące przybliżone związki:

$$x = l\sin\alpha \approx l\alpha$$

$$|F_s| = mg\sin\alpha \approx mg\alpha$$

$$F_s \cong -\frac{mg}{l}x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \cong -\frac{mg}{l}x$$

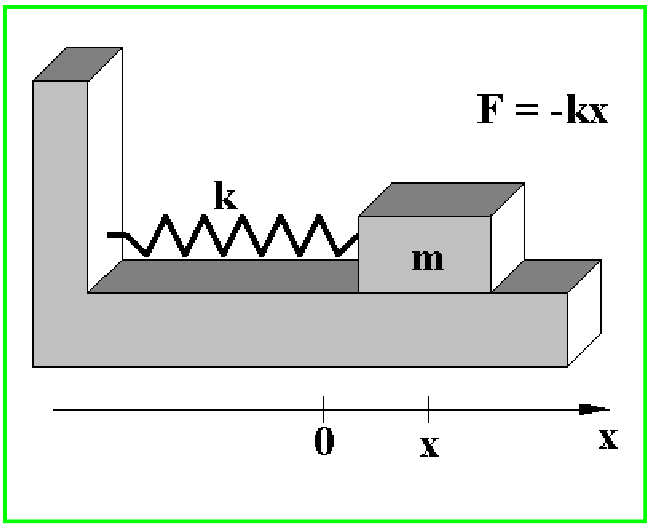
$$\frac{d^2x}{dt^2} \cong -\frac{g}{l}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F = -\dfrac{mg}{l}x & \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{mg}{l}x & T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}x & x = x_0\cos(\omega \cdot t) \end{array}}$$

$$x \cong x_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) \qquad \omega \cong \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

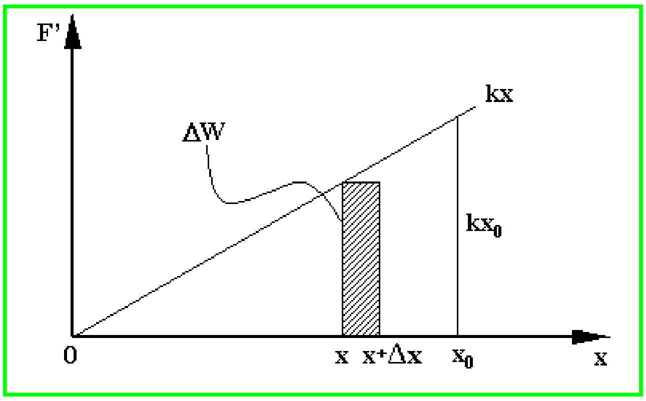
W rzeczywistości okres drgań wahadła matematycznego zależy od amplitudy.

Energia układu drgającego



Na energię drgającego układu składa się energia potencjalna sprężyny o współczynniku sprężystości k zależna od jej wydłużenia (skrócenia) oraz energia kinetyczna masy m.

Jeżeli rozciągamy sprężynę, to musimy wykonać pracę przeciw sile $F = -kx$, działając siłą $F' = -F = kx$



$$\Delta W = k \cdot x \cdot \Delta x$$

$$W = \sum \Delta W = \frac{1}{2} k \cdot x_0 \cdot x_0 = \frac{kx_0^2}{2}$$

Wykonana praca zwiększa energię potencjalną układu drgającego, która wynosi:

$$\boxed{E_P(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2(\omega t)}$$

Drugim składnikiem energii całkowitej jest energia kinetyczna poruszającej się masy (przy założeniu, że sama sprężyna jest nieważka).

$$\boxed{E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(-x_0\omega\sin(\omega t))^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\sin^2(\omega t)}$$

$$E_C = E_K + E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega t)$$

$$\boxed{k = \omega^2 m}$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

W odosobnionym układzie drgającym energia całkowita nie zmienia się. Zachodzi ciągła wzajemna przemiana energii potencjalnej w kinetyczną i kinetycznej w potencjalną. Energia całkowita jest równa maksymalnej energii potencjalnej w skrajnym położeniu

$$\boxed{E_C = E_{P\max} = \frac{1}{2}kx_0^2}$$

albo maksymalnej energii kinetycznej w chwili przejścia przez położenie równowagi

$$\boxed{E_C = E_{K\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2}$$

$$\boxed{E_{P\max} = E_{K\max}}$$

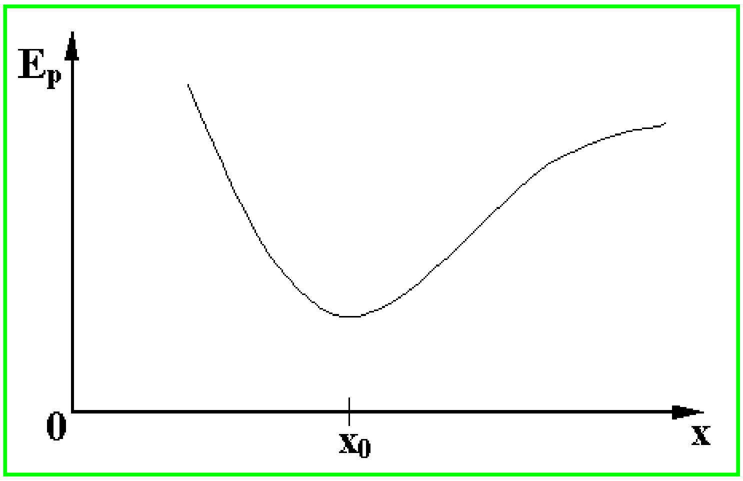
Oba składniki energii całkowitej zmieniają się w taki sam sposób, są tylko przesunięte w fazie o $\frac{\pi}{2}$ (lub w czasie o $\frac{T}{4}$). Zatem równe są też średnie wartości tych energii

$$\boxed{\overline{E}_P = \overline{E}_K}$$

co ma istotne znaczenie w teorii ciepła właściwego ciał stałych.

Uwaga! W przypadku układów drgających z tłumieniem równość występuje tylko w warunkach rezonansu.

Dla dowolnego układu stan (położenie) równowagi odpowiada minimum energii potencjalnej.



$$\frac{dE_P(x_0)}{dx} = 0$$ warunek minimum

$$F = -\frac{dE_P}{dx}$$ ogólny związek między siłą a energią potencjalną

W otoczeniu minimum funkcję $E_P(x)$ rozwijamy w szereg potęgowy

$$E_P(x_0 + \Delta x) = E_0 + E_P{}'\cdot\Delta x + \tfrac{1}{2}E_P{}''\cdot\Delta x^2 + \ldots$$

Siła jaka pojawia się przy niewielkiej zmianie położenia

$$F = -\frac{dE_P}{dx} \approx -E_P{}''\cdot\Delta x$$

ma taki sam charakter jak siła harmoniczna.