9. Dynamika relatywistyczna

Zasada zachowania pędu mówi, że w układzie odosobnionym zawierającym n cząstek ich całkowity pęd obliczony w chwili t_0 i pęd w dowolnej chwili późniejszej t są jednakowe:

$$\vec{p}_c(t_0) = \vec{p}_c(t)$$

Dla składowej x oznacza to w szczególności, że

$$\sum_1^n m_i \cdot u_{ix} = \sum_1^n m_i \cdot U_{ix} \qquad \begin{cases} u_i \text{ - predkosci poczatkowe} \\ U_i \text{ - predkosci koncowe} \end{cases}$$

Jeżeli zmienimy układ odniesienia na poruszający się z prędkością v w kierunku osi x, to po uwzględnieniu transformacji Galileusza otrzymamy

$$\sum_1^n m_i \cdot (u_{ix} - v) = \sum_1^n m_i \cdot (U_{ix} - v)$$

$$\sum_1^n m_i \cdot u'_{ix} = \sum_1^n m_i \cdot U'_{ix}$$

Zasada zachowania pędu jest prawdziwa we wszystkich układach odniesienia.

Według teorii względności prędkości transformują się inaczej i powinniśmy zapisać

$$\sum_1^n m_i \cdot \frac{u_{ix} - v}{1 - \frac{v u_{ix}}{c^2}} = \sum_1^n m_i \cdot \frac{U_{ix} - v}{1 - \frac{v U_{ix}}{c^2}}$$

W ogólnym przypadku równania (1) i (3) nie mogą być równocześnie spełnione. Usunięcie tej sprzeczności wymagało zmodyfikowania definicji pędu relatywistycznego.

Pęd cząstki o masie własnej m_0 wynosi

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \vec{u}}$$

$$\boxed{\begin{cases} p'_x = \dfrac{p_x - \dfrac{u}{c^2}E}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}; \\ p'_y = p_y; \qquad p'_z = p_z; \\ E' = \dfrac{E + u\cdot p_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}}$$

Transformacja Lorentz'a dla pędu-energii.

E jest całkowitą energią relatywistyczną cząstki swobodnej:

$$\boxed{E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$$

Jest to definicja Einsteina energii cząstki swobodnej.

Tak zdefiniowany pęd jest zachowany w każdym układu odniesienia.

Obliczymy teraz przybliżoną wartość energii relatywistycznej cząstki swobodnej poruszającej się z małą prędkością $u<<c$. Skorzystamy przy tym z wzoru przybliżonego:

$$(1+x)^a \cong 1 + a\cdot x; \qquad |x| << 1$$

Dla małych prędkości ($u<<c$) energia relatywistyczna praktycznie równa

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \cdot c^2 (1-\tfrac{u^2}{c^2})^{-1/2} \cong m_0 \cdot c^2 (1+\tfrac{u^2}{2c^2})$$

$$E \cong m_0 \cdot c^2 + \frac{m_0 \cdot u^2}{2}$$

się klasycznej energii kinetycznej, jeżeli dodać do niej stały składnik $m_0{\cdot}c^2$.

$\boxed{E_0 = m_0 \cdot c^2}$ nazywa się energią spoczynkową cząstki

Hipoteza Einsteina, że ze spoczywającą cząstką swobodną o masie własnej m_0 jest związana energia $m_0{\cdot}c^2$, została sformułowana w 1905 roku i została potwierdzona doświadczalnie.

Relatywistyczną definicję pędu najczęściej uważa się również za określenie względności masy.
Masa cząstki poruszającej się jest większa od jej masy własnej (spoczynkowej)

$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

definicja masy relatywistycznej

Przy takiej definicji masy pęd relatywistyczny i energia całkowita wynoszą

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}} \qquad \boxed{E = m \cdot c^2}$$

Relatywistyczna energia kinetyczna jest określona podobnie jak klasyczna, jako przyrost energii cząstki związany z jej ruchem z prędkością v i wynosi:

$$E_k = E - E_0$$

$$E_k = (m - m_0)c^2 = \left(\sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} - 1\right) \cdot m_0 \cdot c^2$$

Poprzednio już sprawdziliśmy, że przy takiej definicji energia kinetyczna relatywistyczna pokrywa się z klasyczną dla prędkości $v << c$.

Równoważność masy i energii

Wzór Einsteina

$$E = m \cdot c^2$$

był podstawą do sformułowania zasady równoważności masy i energii (w tej sytuacji c^2 służy do przeliczania jednostek).

Jeżeli masa spoczynkowa układu zmniejsza się o Δm, to wyzwala się przy tym energia w ilości

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Wynik ten potwierdzono doświadczalnie. Przykładem może być rozpad swobodnego neutronu na proton, elektron i antyneutrino

$$n^0 \to p^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$$

Neutron ma masę spoczynkową większą od mas spoczynkowych protonu, elektronu i antyneutrina razem o około

$$\Delta m = 13{,}9 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

Zmierzone energie kinetyczne cząstek – produktów rozpadu neutronu wynoszą razem $1{,}25 \cdot 10^{-13}$ J co zgadza się w granicach dokładności pomiarowych z wartością

$$\Delta m \cdot c^2$$

Innym przykładem jest zjawisko fotoelektryczne lub zjawisko Comptona, w których foton – cząstka związana z polem elektromagnetycznym – o energii

$$E = h \cdot \nu$$

Zachowuje się jak cząstka o masie m_f i pędzie p_f, wynoszących:

$$m_f = \frac{h \cdot \nu}{c^2}; \qquad p_f = \frac{h \cdot \nu}{c} = m_f \cdot c$$

Siła w mechanice relatywistycznej

Zmiana definicji pędu relatywistycznego pociąga konieczność zmiany definicji siły, jeżeli chcemy zachować formę drugiej zasady dynamiki Newtona.

Siła relatywistyczna jest pochodną pędu relatywistycznego względem czasu własnego obserwatora

$$\boxed{\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Ponieważ przy zmianie układu odniesienia transformują się i pęd i czas, to w przypadku ogólnym siła zmienia wartość i kierunek.

W szczególności okazuje się, że siły magnetyczne między prądami elektrycznymi, są wynikiem transformacji sił elektrycznych między ładunkami elektrycznymi przy przejściu do poruszającego się układu odniesienia.

Jeżeli w układzie Ox na cząstkę działa siła

$$\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$$

i w układzie Ox' poruszającym się względem Ox cząstka (chwilowo) ma prędkość 0, to

$$\begin{cases} F'_x = F_x \\ F'_y = \dfrac{F_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ F'_z = \dfrac{F_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

10. Nieinercjalne układy odniesienia

Nieinercjalnym układem odniesienia jest każdy układ, który porusza się z przyspieszeniem względem jakiegoś układu inercjalnego.

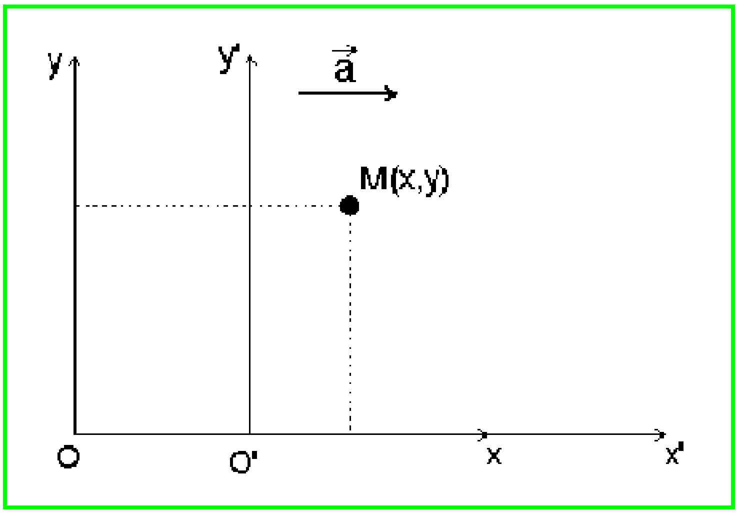
Ponieważ dowolny ruch można traktować jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego, to zajmiemy się oddzielnie układami, które poruszają się z przyspieszeniem po linii prostej i oddzielnie takimi, które się obracają.

Cząstka o masie m spoczywa w układzie Ox czyli wypadkowa siła działająca w tym układzie wynosi

$$\vec{F}_w = 0$$

Układ Ox' porusza się względem Ox ze stałym przyspieszeniem

$$\vec{a} \neq 0$$



$$x, y = const.$$

$$\text{dla } t_0 = 0: \; O = O' \text{ i } v = 0$$

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \\ x' = x'_0 - \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ v' = -a \cdot t \\ a' = -a \end{cases}$$

W układzie nieinercjalnym cząstka porusza się ze zmienną prędkością i ze stałym przyspieszeniem $-a$ skierowanym przeciwnie do osi Ox'.

W układzie Ox' nie są spełnione I i II zasada dynamiki Newtona. Bardziej ogólnie można by stwierdzić, że w układach nieinercjalnych zasady te nie są spełnione.

Siły bezwładności w nieinercjalnych układach odniesienia

Zasady dynamiki można „uratować” i stosować również w układach nieinercjalnych, jeżeli wprowadzi się siły bezwładności. Siły bezwładności działają wyłącznie w układach nieinercjalnych i wynikają z ruchu przyśpieszonego tych układów. Dla obserwatora znajdującego się w takim układzie są to siły jak najbardziej realne, nawet jeżeli nie potrafi wskazać ich bezpośredniego źródła.

W ogólnej teorii względności (teorii grawitacji), której autorem jest Einstein, postuluje się równoważność sił bezwładności i sił grawitacyjnych. Odpowiednia zasada równoważności mówi, że lokalnie nie można w żadnym doświadczeniu fizycznym odróżnić od siebie siły grawitacji i siły bezwładności.

Z zasady tej wynika, między innymi, że układem inercjalnym jest układ swobodnie spadający w polu grawitacyjnym.

W układzie Ox' na cząstkę działa siła:

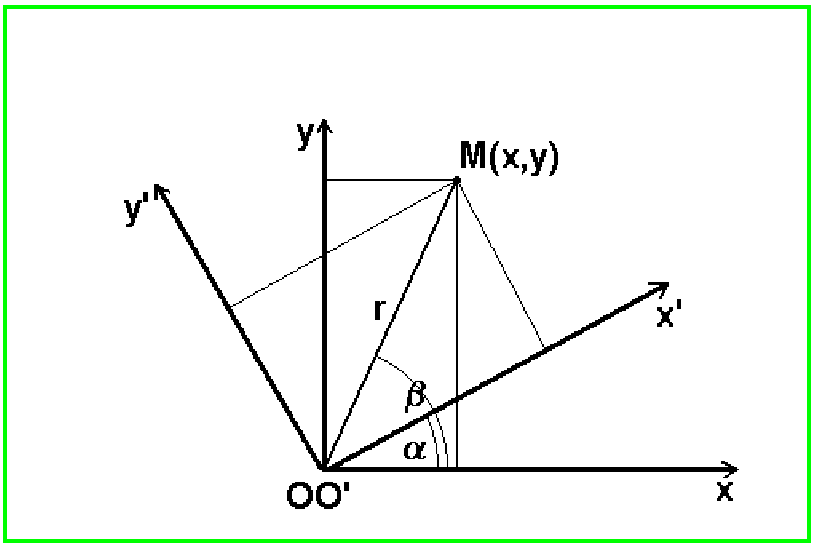
$$\boxed{F'_x = -m \cdot a}$$

Siłę działającą na cząstkę o masie m w układzie nieinercjalnym poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}$ i równą:

$$\boxed{\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a}}$$

nazywamy **siłą bezwładności**.

Obracający się układ odniesienia



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\beta \\ y = r \cdot \sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cdot \cos(\beta - \alpha) \\ y' = r \cdot \sin(\beta - \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cdot \cos(\beta - \alpha) = r(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y' = r \cdot sin(\beta - \alpha) = r(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Układ O' obraca się jednostajnie wokół osi z: $\alpha = \omega \cdot t$

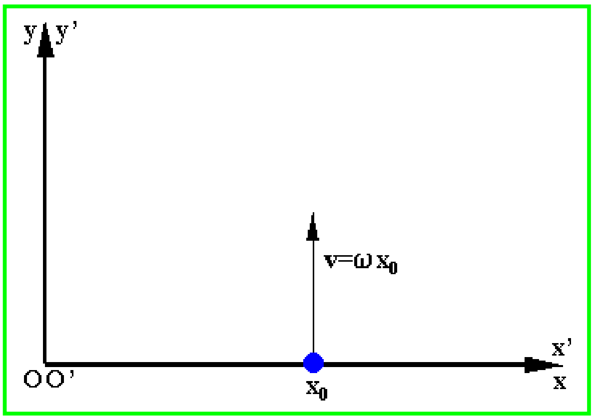
$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\omega t + y \cdot \sin\omega t \\ y' = -x \cdot \sin\omega t + y \cdot \cos\omega t \end{cases}$$

W chwili $t=0$ oba układy współrzędnych pokrywają się. W układzie O porusza się punkt $M(x,y)$.

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = v \cdot t \end{cases} \qquad v = \omega \cdot x_0$$

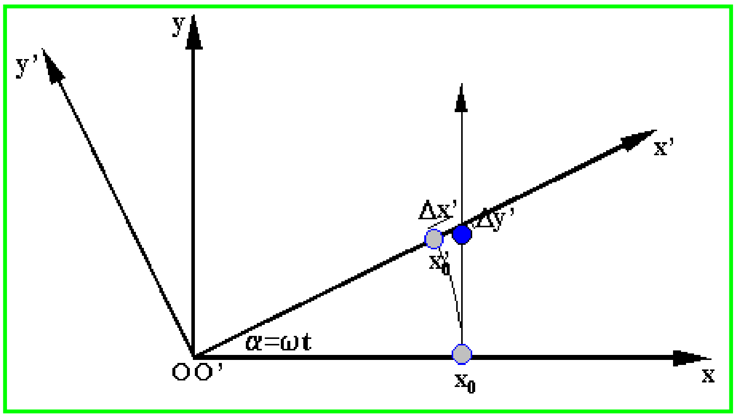
Położenie punktu jest tak dobrane, że w chwili $t=0$ jego prędkość względem O' wynosi 0 (punkt chwilowo nie porusza się).

1° w chwili początkowej



$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x_0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

2° w chwili nieco późniejszej $t > 0$ ale $\omega \cdot t << 1$



$$v = \omega \cdot x_0 \qquad v' = 0$$

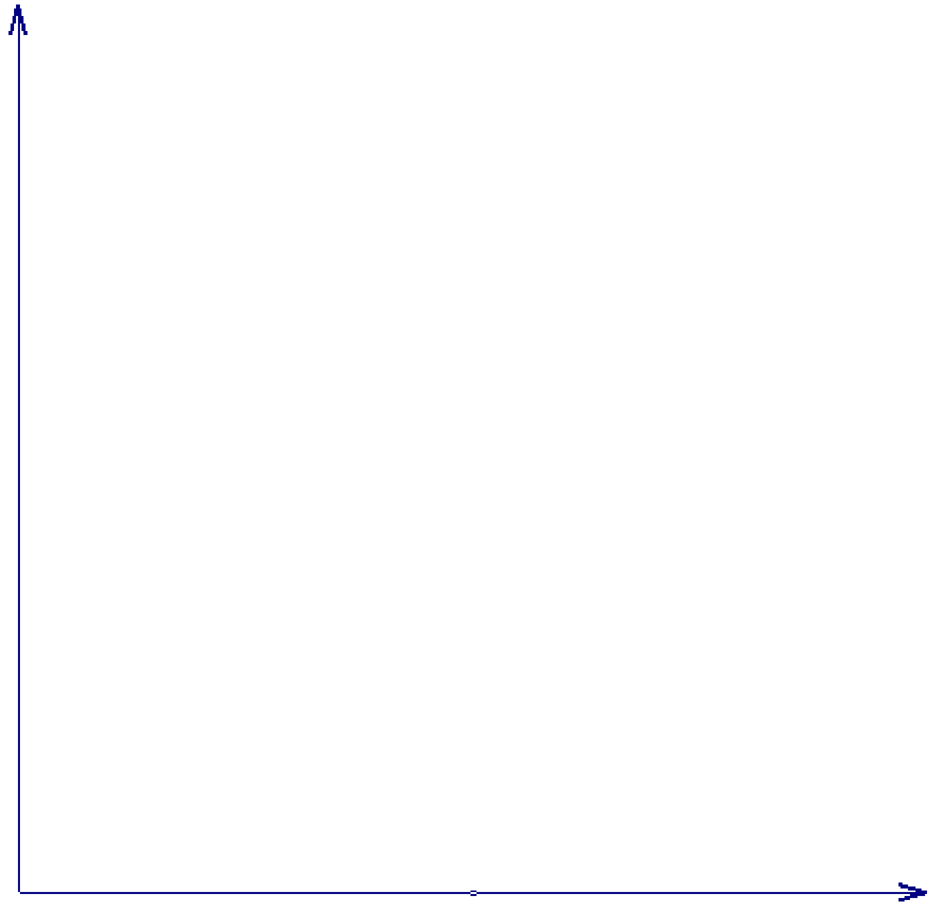
$$\Delta x' = \tfrac{1}{2}(\omega^2 \cdot x_0)t^2$$

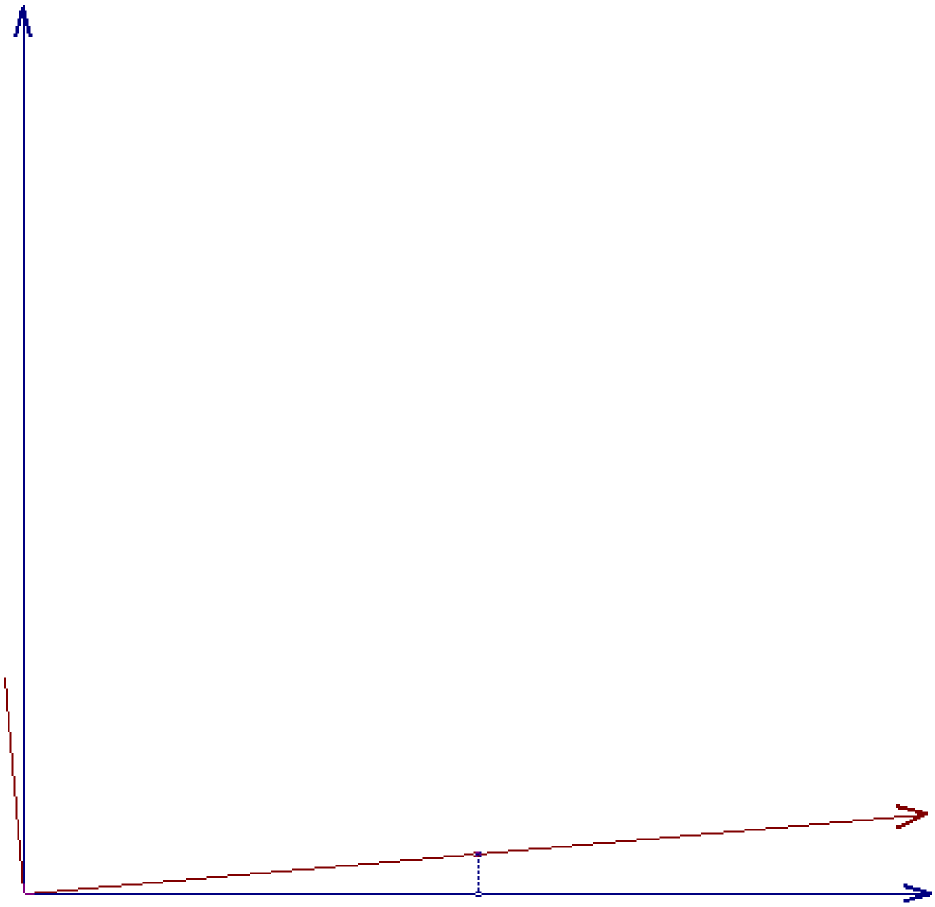
$$\Delta y' = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 \cdot x_0 \cdot t \cdot \omega)t^2$$

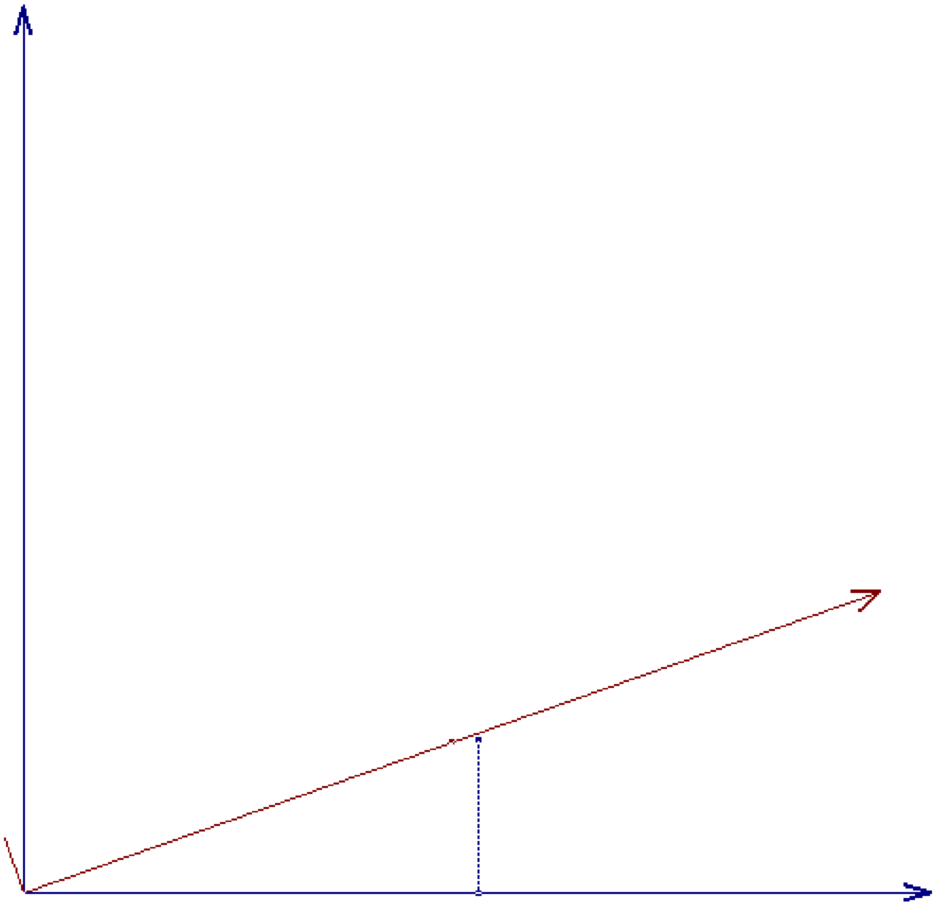
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = v \cdot t = \omega \cdot x_0 \cdot t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \cdot \cos(\omega t) + y \cdot \sin(\omega t) \\ y' = -x \cdot \sin(\omega t) + y \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

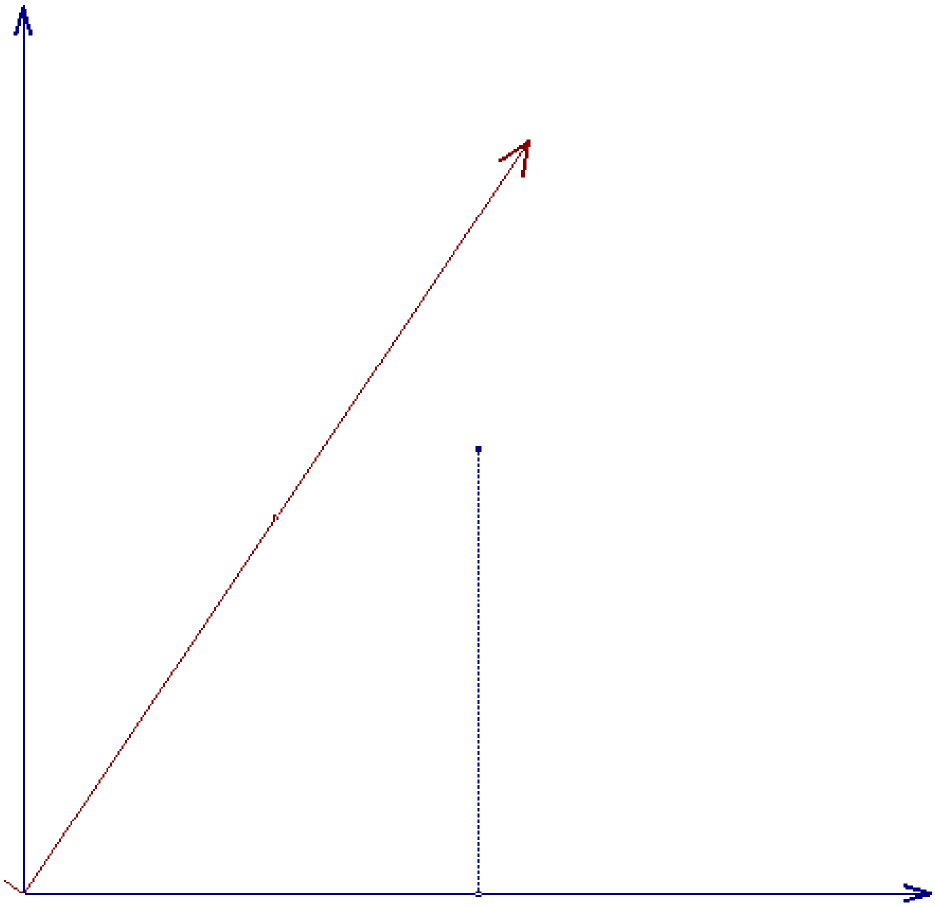
$\sin x \approx x$	$\lvert x \rvert << 1$
$\cos x \approx 1 - \tfrac{1}{2}x^2$	$\lvert x \rvert << 1$

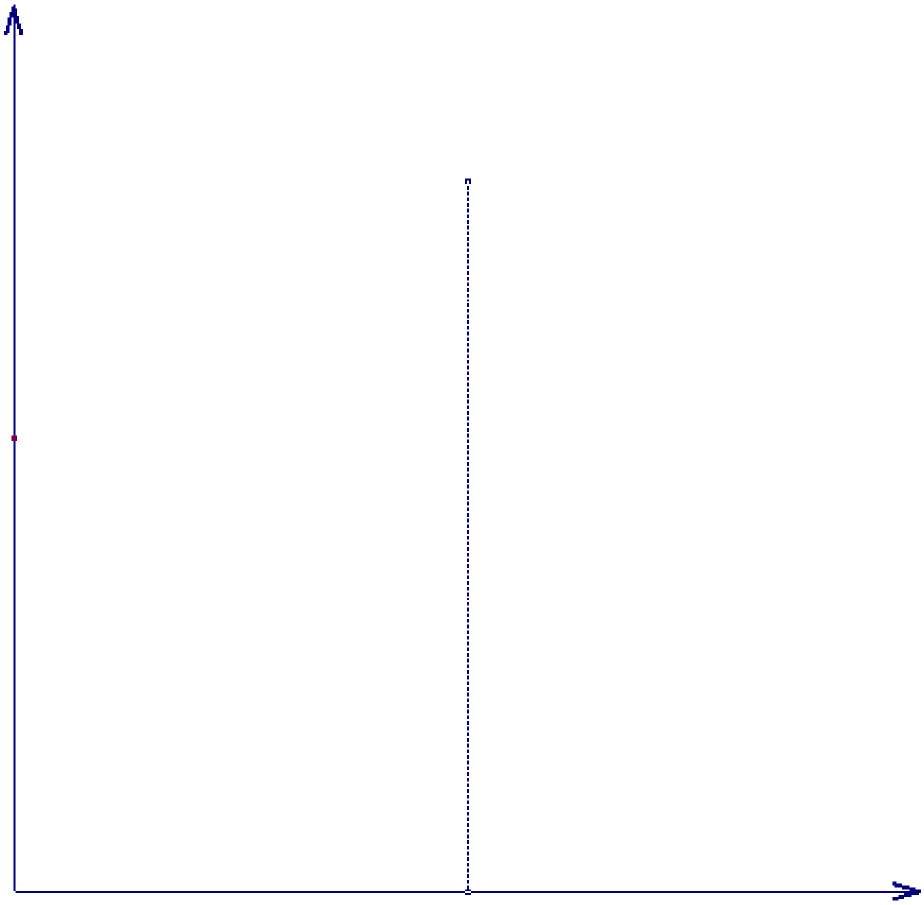
$$\begin{cases} x' = x_0 \cdot (1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cdot t^2) + v \cdot t \cdot \omega \cdot t = x_0 + \tfrac{1}{2}(\omega^2 \cdot x_0)t^2 \\ y' = -x_0 \cdot \omega \cdot t + v \cdot t \cdot (1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cdot t^2) = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 \cdot x_0 \cdot t \cdot \omega)t^2 \end{cases}$$

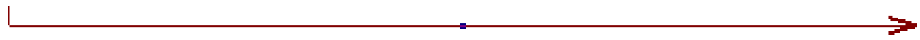


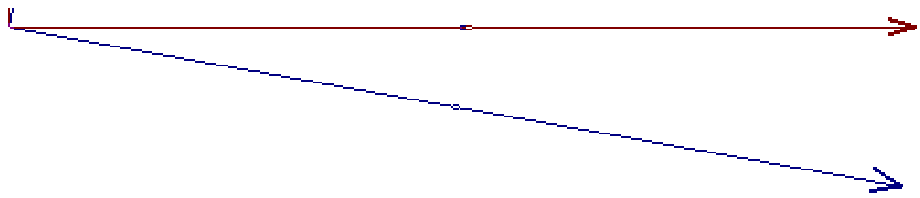


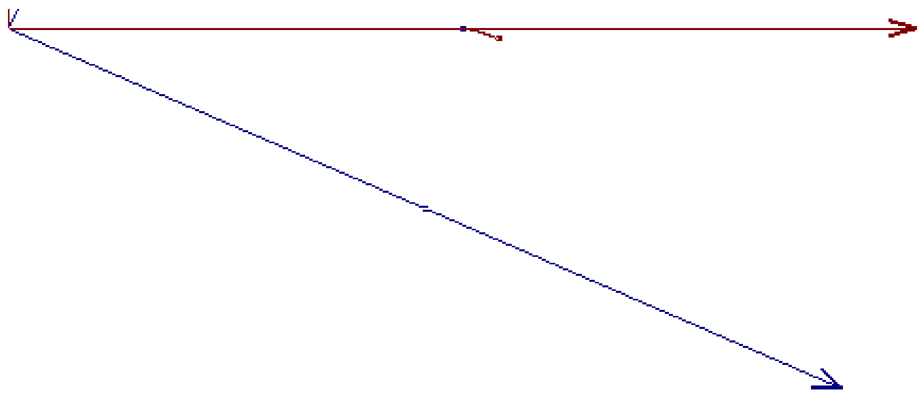


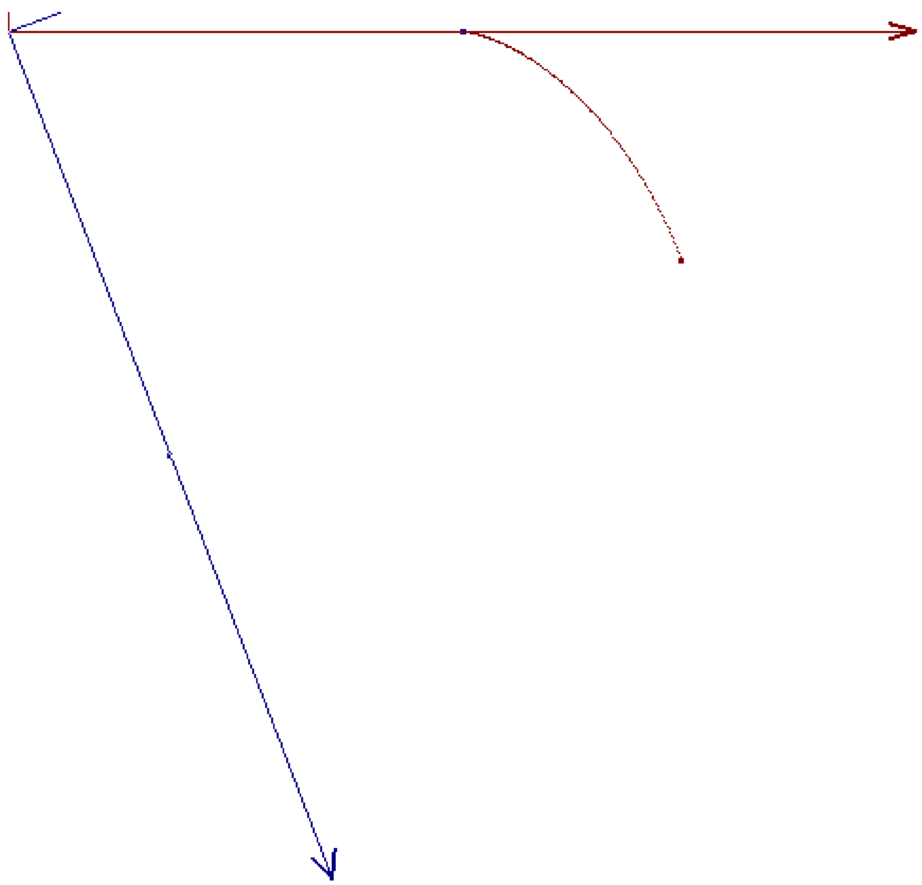


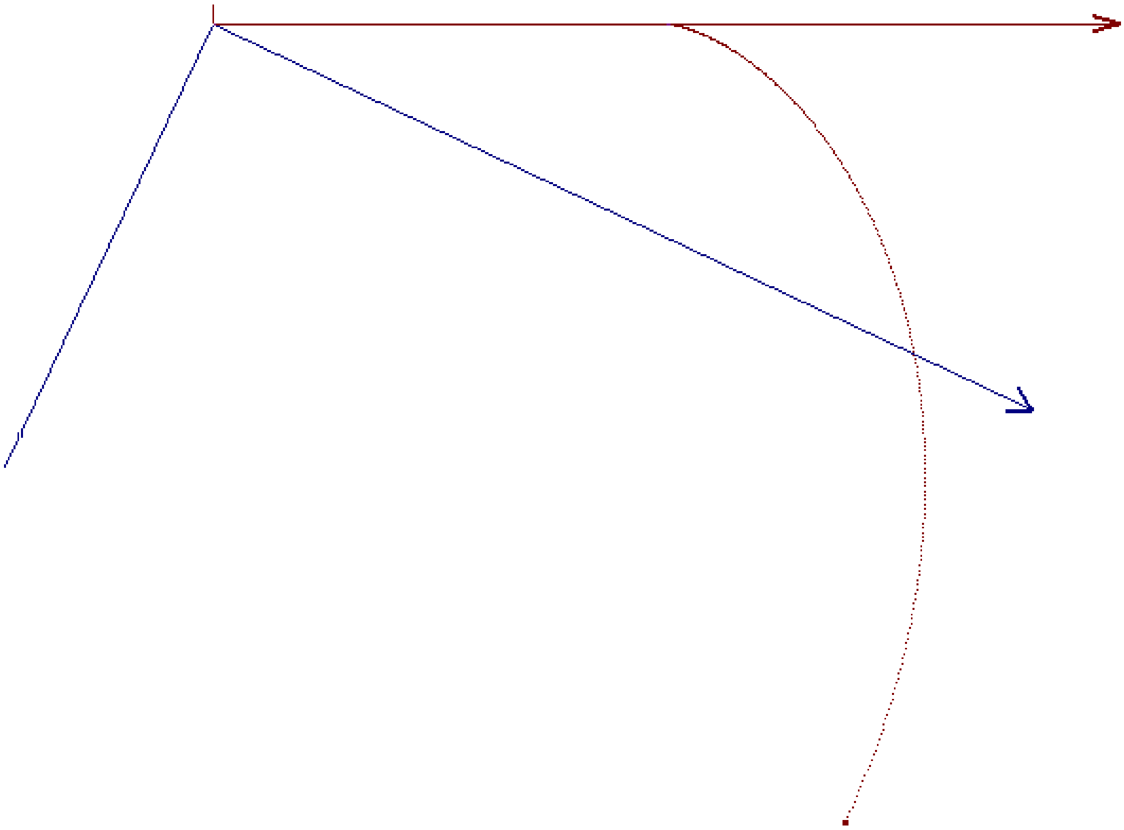












Ruch w kierunku osi Ox' jest jednostajnie przyspieszony

$$x' = x_0 + \tfrac{1}{2}(\omega^2 \cdot x_0)t^2 = x_0 + \tfrac{1}{2}a \cdot t^2$$

z przyspieszeniem $a_r = \omega^2 x_0$

Przyspieszenie odśrodkowe

$$\boxed{\vec{a}_r = \omega^2 \cdot \vec{r}}$$

Odśrodkowa siła bezwładności

$$\boxed{\vec{F}_r = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}}$$

działa na każde ciało w układzie obracającym się.

Prędkość końcowa w tym ruchu i prędkość średnia wynoszą:

$$v'_x = \omega^2 \cdot x_0 \cdot t \qquad \bar{v}'_x = \tfrac{1}{2}\omega^2 \cdot x_0 \cdot t$$

Ruch w kierunku osi Oy' jest też przyspieszony

$$y' = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 \cdot x_0 \cdot t \cdot \omega)t^2 = -\tfrac{1}{2}(2 \cdot \bar{v}'_x \cdot \omega) \cdot t^2 = -\tfrac{1}{2}a \cdot t^2$$

średnie opóźnienie

$$a_c = -2\omega \cdot v'_x$$

Przyspieszenie Coriolis'a

$$\boxed{\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

Siła Coriolis'a bezwładności

$$\boxed{\vec{F}_C = -2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

działa na ciała poruszające się w układach obracających się.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$
$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$