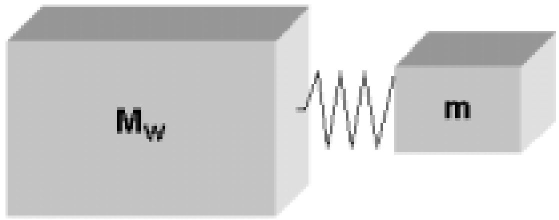
3. Dynamika punktu materialnego

Masa bezwładna



$$\boxed{m \equiv M_w \cdot \frac{V_w}{v}}$$

Pęd

Pęd jest ilościową miarą ruchu obiektu

$$\boxed{\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v}}$$

Siła

Siła jest przyczyną zmiany stanu ruchu (zmiany pędu)

$$\boxed{\vec{F} \equiv \frac{d\,\vec{p}}{dt}} \quad \text{albo} \quad \vec{F}_{sr} = \frac{\Delta\,\vec{p}}{\Delta t}.$$

Jeżeli

$$m = \text{const.},$$

to

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Zasady dynamiki Newtona

Pierwsza - zasada bezwładności
Jeżeli suma sił działających na ciało (siła wypadkowa) jest równa zeru, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. *(Oznacza to, że prędkość ciała jest stała a przyspieszenie jest równe zeru.)*

Druga zasada dynamiki
Szybkość zmiany pędu *(zmiana pędu przypadająca na jednostkę czasu - pochodna pędu względem czasu)* jest równa wypadkowej sile działającej na ciało.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \vec{F} \qquad \left(\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \equiv \vec{F} \right)$$

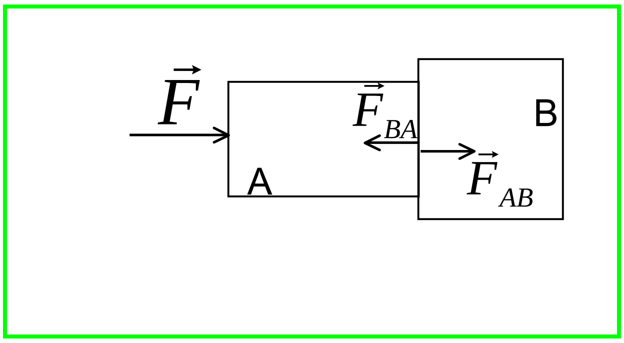
Trzecia - zasada akcji i reakcji
Gdy dwa ciała oddziałują wzajemnie na siebie, to siła wywierana przez pierwsze ciało na drugie jest równa i przeciwnie skierowana do siły jaką ciało drugie działa na pierwsze.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Te dwie siły nie znoszą się, bo są przyłożone do innych ciał.

Pierwsza zasada dynamiki postuluje istnienie inercjalnych układów odniesienia:
Jeżeli na ciało nie działają siły zewnętrzne, to istnieje układ odniesienia, w którym to ciało spoczywa lub ma prędkość stałą.
Układ odniesienia, w którym są spełnione zasady dynamiki Newtona nazywamy inercjalnym układem odniesienia.

Przykład wykorzystania 3. zasady dynamiki



$$\vec{F}_{AB} = m_B \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{BA} = m_A \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Równoważny układ równań skalarnych

$$m_B \cdot a = F_{AB}$$

$$F - F_{AB} = m_A \cdot a$$

$$F - m_B \cdot a = m_A \cdot a$$

$$F = (m_A + m_B)a$$

i rozwiązanie

$$a = \frac{F}{m_A + m_B}$$

Zachowanie pędu w układach odosobnionych

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Pęd jest wielkością addytywną, co oznacza, że pęd całkowity układu składającego się z wielu części jest sumą pędów tych części:

$$\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i$$

Dla uproszczenia ograniczymy się tylko do dwóch części

$$\vec{p}_C = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B$$

Układ odosobniony (izolowany): układ, na który nie działają żadne siły zewnętrzne.
Oznacza to, że jeżeli w tym układzie działają jakieś siły, to są to siły wzajemnego oddziaływania między częściami tego układu.

Na podstawie 3. zasady dynamiki

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

wykorzystując 2. zasadę dynamiki możemy zapisać

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad \text{lub} \quad \frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_B}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B$$

$$\Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0$$

$$\Delta(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$$

$$\Delta\vec{p}_C = 0 \Rightarrow \vec{p}_C = const.$$

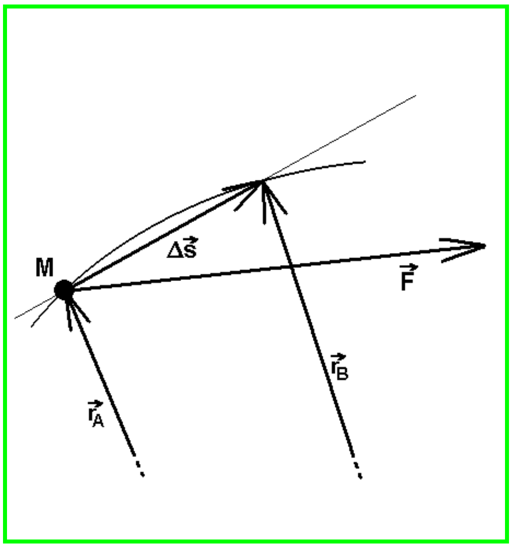
Pęd układu odosobnionego nie zmienia się.

Dla większej liczby części rezultat uogólnia się i można go zapisać w postaci równania:

$$\vec{p}_C = \sum \vec{p}_i = const.$$

4. Praca siły. Energia kinetyczna w ruchu postępowym

Jeżeli siła jest przyłożona do jakiegoś ciała i punkt przyłożenia siły przemieszcza się, to mówimy o pracy wykonywanej przez siłę.



$$\Delta\vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

praca jest skalarem

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$$

lub

$$\Delta W = F\cdot\Delta s\cdot\cos(\vec{F},\Delta\vec{s})$$

Iloczyn skalarny wektorów jest liczbą określoną następująco:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$$

Ogólnie możemy pracę zapisać nieco inaczej:

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot\Delta t$$

Stosunek wartości pracy do czasu, w którym została wykonana nazywamy mocą (średnią):

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = P$$

Zatem moc siły działającej na poruszające się ciało wynosi

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

albo

$$P = F\cdot v\cdot\cos(\vec{F},\vec{v}).$$

W ruchu prostoliniowym pod działaniem stałej siły

$$\vec{F} \parallel \vec{v}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$a = \frac{F}{m} = const.$$

$$v = v_0 + at = v_0 + \frac{F}{m} t \qquad \left(v^2 = v_0^2 + \frac{F^2 t^2}{m^2} + 2\frac{F v_0 t}{m} \right)$$

$$P = F \cdot v = v_0 \cdot F + \frac{F^2}{m} t$$

w ruchu ze stałym przyspieszeniem potrzebna moc rośnie liniowo z upływem czasu

W chwili początkowej $t_0 = 0,\ v_0,\ x_0 = 0$

Praca wykonana od początku do chwili t wynosi w tych warunkach

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = F(v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}) = F \cdot v_0 \cdot t + \frac{F^2 \cdot t^2}{2m}$$

1° $v_0 = 0$

$$\Delta W = \frac{F^2 \cdot t^2}{2m} \qquad v = \frac{F \cdot t}{m}$$

czyli

$$\Delta W = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

2° $v_0 \neq 0$

$$\Delta W = F \cdot v_0 \cdot t + \frac{F^2 \cdot t^2}{2m} = \frac{m}{2}\left(\frac{F^2 \cdot t^2}{m^2} + \frac{2F \cdot v_0 \cdot t}{m}\right)$$

$$\Delta W = \frac{m}{2}\left(\underbrace{v_0^2 + \frac{F^2 \cdot t^2}{m^2} + \frac{2F \cdot v_0 \cdot t}{m}}_{v^2} - v_0^2\right)$$

$$\Delta W = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Te związki są prawdziwe dla każdego przypadku ruchu postępowego (w którym wszystkie części ciała poruszają się z jednakową prędkością).

Klasyczna definicja energii kinetycznej:

$$\boxed{E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}}$$

albo

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}}$$

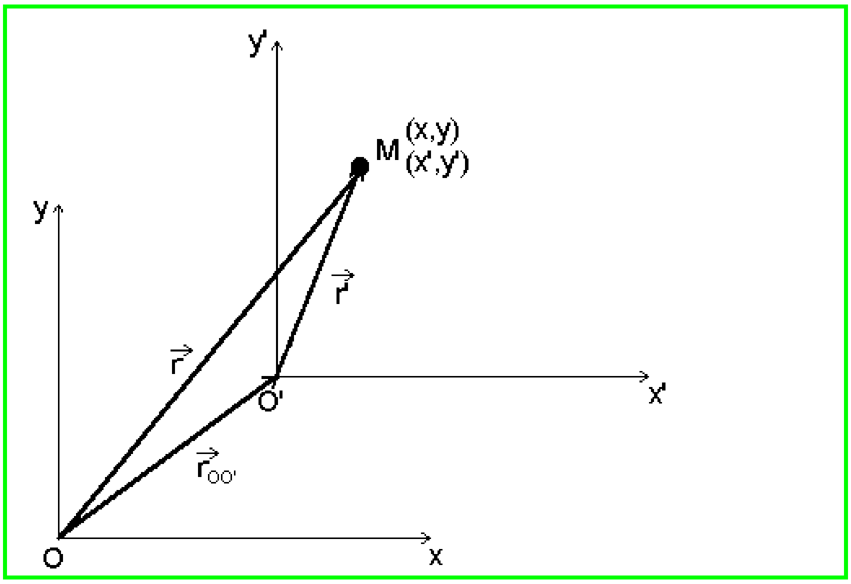
5. Klasyczna zasada względności

<u>Prawa mechaniki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.</u>

Prawa mechaniki nie wyróżniają żadnego układu odniesienia. Wszystkie układy są równoprawne.

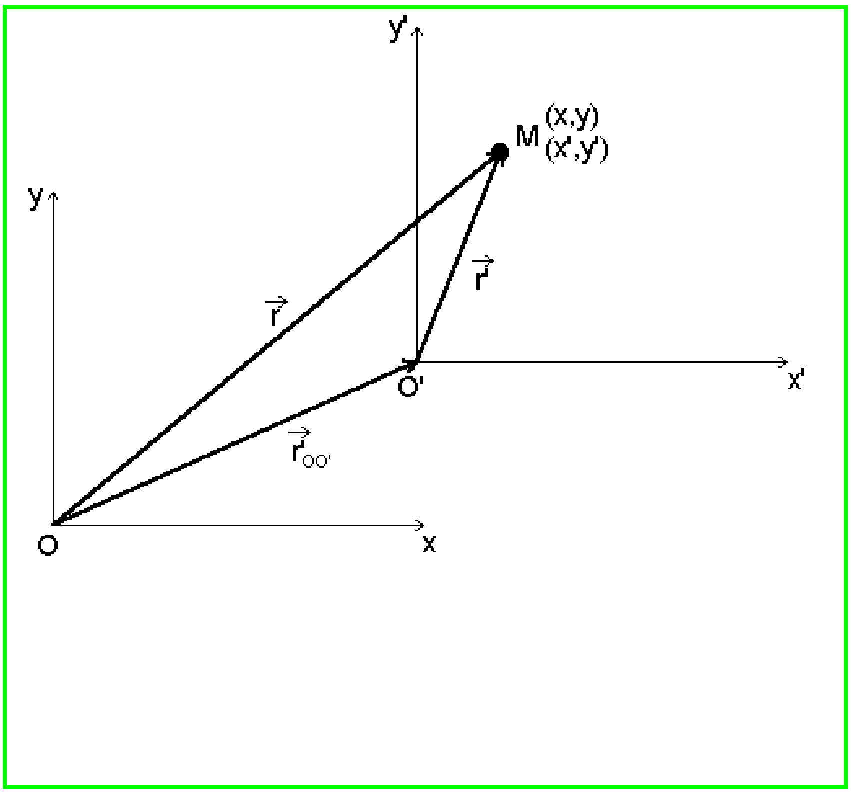
Nie ma absolutnego układu odniesienia; nie ma absolutnego ruchu czy absolutnego spoczynku. Są to pojęcia względne. Położenie, stan ruchu, prędkość, itp., zależą od wyboru układu odniesienia i w każdym mogą być inne.

Transformacja Galileusza



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{OO'}$$



$$\frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} = \vec{V}$$

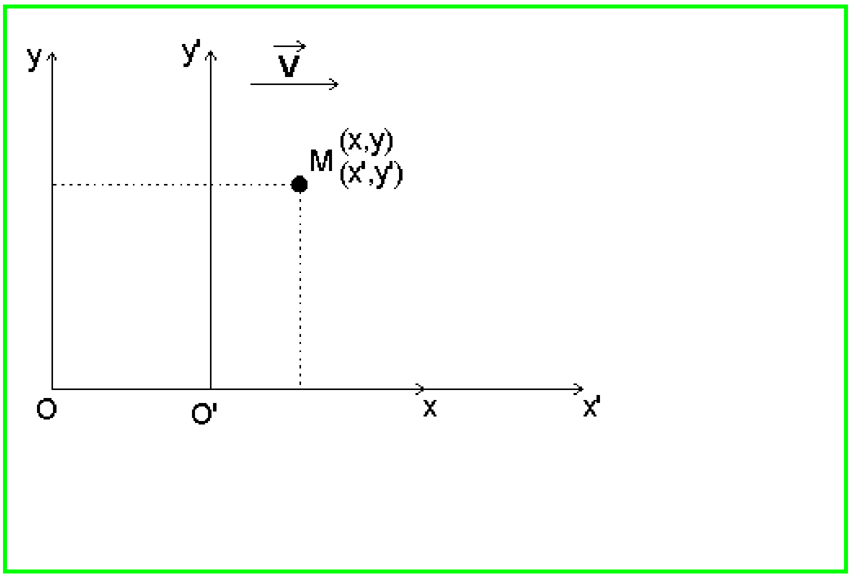
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}\,'$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}$$

Transformacja Galileusza współrzędnych



$$\begin{cases} x = x' + \vec{V}t \\ y = y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - \vec{V}t \\ y' = y \end{cases}$$

Transformacja Galileusza prędkości

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

lub

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

Różniczkowanie równania 3-5 daje związek między przyspieszeniami w obu układach:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Przyspieszenie ma taką samą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

W mechanice klasyczne przyspieszenie, a również i siła, ma charakter bezwzględny i nie zależy od wyboru układu odniesienia.

6. Mechanika relatywistyczna

Szczególna zasada względności

Wszystkie zjawiska fizyczne przebiegają jednakowo
we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

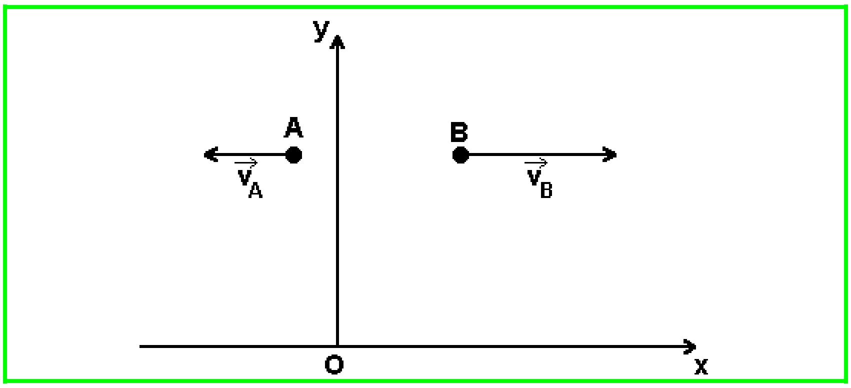
Według nowoczesnej definicji układem inercjalnym jest każdy układ, w którym prędkość światła w próżni jest równa

$$c = 299792458 \frac{m}{s}$$

i nie zależy od kierunku.

Ogólna zasada względności:

Prawa fizyki są jednakowe we wszystkich układach odniesienia.



Według wzoru klasycznego:

$$v_{BA} = v_B + v_A$$

Jeżeli prędkość światła w próżni jest niezmiennicza względem zmiany układu odniesienia (inercjalnego), to wzór 4-2 nie może być prawdziwy. Trzeba zastąpić go wzorem wynikającym nie z transformacji Galileusza a z transformacji Lorentz'a:

$$\boxed{v_{BA} = \frac{v_B + v_A}{1 + \frac{v_A \cdot v_B}{c^2}}}$$

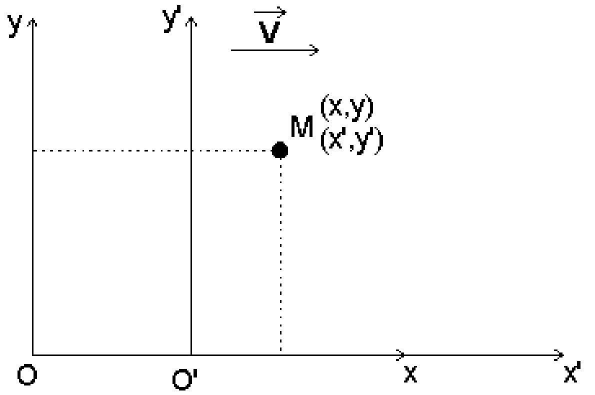
Wzór (4-3) wyraża transformację Lorentz'a dla prędkości.

W szczególności, jeżeli $v_B = c$, to

$$v_{BA} = \frac{c + v_A}{1 + \frac{v_A \cdot c}{c^2}} = \frac{c + v_A}{c + v_A} c = c$$

Wynika z tego, że wartość prędkości światła w próżni jest maksymalną wartością prędkości.

Transformacja Lorentz'a współrzędnych



$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + \vec{V}t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y = y' \\ t = \dfrac{t' + x' \cdot V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' = y \\ t' = \dfrac{t - x \cdot V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

W mechanice relatywistycznej również czas traci charakter bezwzględny. Jego wartość zależy od wyboru układu odniesienia. Zgromadzone fakty doświadczalne (wyniki różnych pomiarów) jednoznacznie potwierdzają założenia mechaniki relatywistycznej i słuszność powyższych wzorów transformacyjnych.

Jeżeli $c \to \infty$, to transformacja Lorentz'a przechodzi w granicy w transformację Galileusza.

7. Pomiary długości i czasu trwania w różnych układach inercjalnych

Pomiar odstępu czasu (interwału czasowego) między dwoma zdarzeniami zachodzącymi w tym samym miejscu układu poruszającego się, np. tyknięcia zegara.

$$(t'_1, x'_1) \qquad (t'_2, x'_2)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \qquad x'_2 = x'_1$$

$$(t_1, x_1) \qquad (t_2, x_2)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad x_2 \neq x_1$$

$$t = \frac{t' + x' \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \qquad x = \frac{x' + \vec{V} t'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

$$t_2 = \frac{t'_2 + x'_2 \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \qquad t_1 = \frac{t'_1 + x'_1 \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + (x'_2 - x'_1)\cdot V / c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} =$$

$$\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

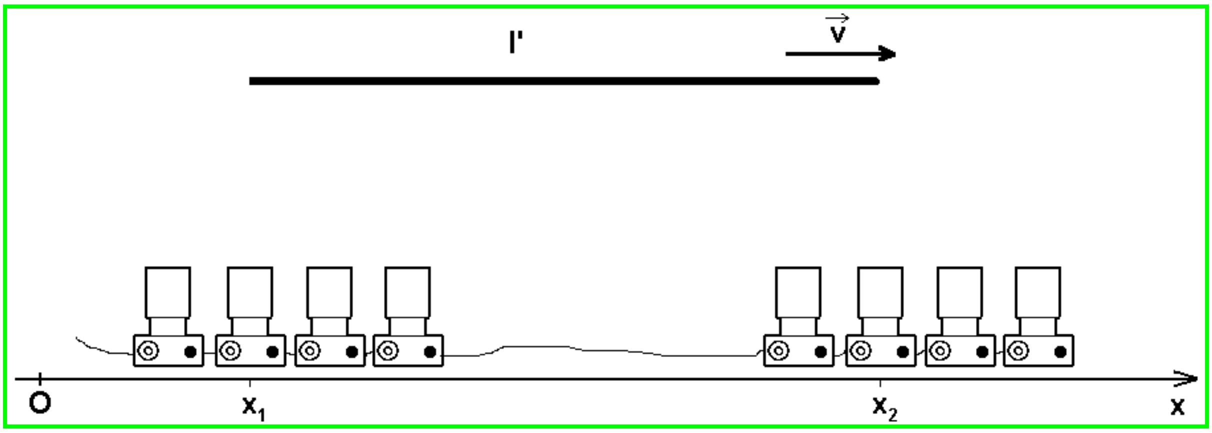
$$\boxed{\begin{gathered}\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \\ \Delta t > \Delta t'\end{gathered}}$$

Jeżeli my znajdujemy się w układzie nieprimowanym („nie poruszającym się”), to uznamy, że w układzie primowanym („poruszającym się”) czas płynie wolniej.
Zjawisko to nazywa się **dylatacją czasu**.

Pomiar długości (interwału przestrzennego)

W układzie poruszającym się (O') znajduje się pręt o długości l' (spoczywający w tym układzie) ułożony równolegle do osi O'x'. Jaką długość tego pręta zmierzy obserwator w układzie O?

W tym celu należy zaproponować sposób pomiaru poruszających się przedmiotów przy pomocy nieruchomej miary.



Odległość między aparatami, które jednocześnie zarejestrują końce pręta jest długością pręta l w układzie Ox.

W układzie Ox :

$$(x_1, t_1) \quad (x_2, t_2) \qquad l = x_2 - x_1 \quad t_2 = t_1 \qquad \text{(E 7-1)}$$

W układzie pręta:

$$(x'_1, t'_1)\,(x'_2, t'_2) \quad l' = x'_2 - x'_1 \quad t'_2 \neq t'_1 \qquad \text{(E 7-2)}$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

(E 7-3)

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{l = l' \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} \qquad l < l'}$$

(E 7-4)

Długość przedmiotów poruszających się jest mniejsza do ich długości własnej (tj. mierzonej w układzie, w którym spoczywają).
Zjawisko to nazywa się relatywistycznym skróceniem długości.

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 + (x_2 - x_1)\cdot v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$\frac{-l \cdot v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(E 7-5)

Według obserwatora w układzie O', który porusza się razem z prętem, migawki aparatów nie zadziałały jednocześnie. Aparat x_2 zadziałał wcześniej od aparatu x_1.

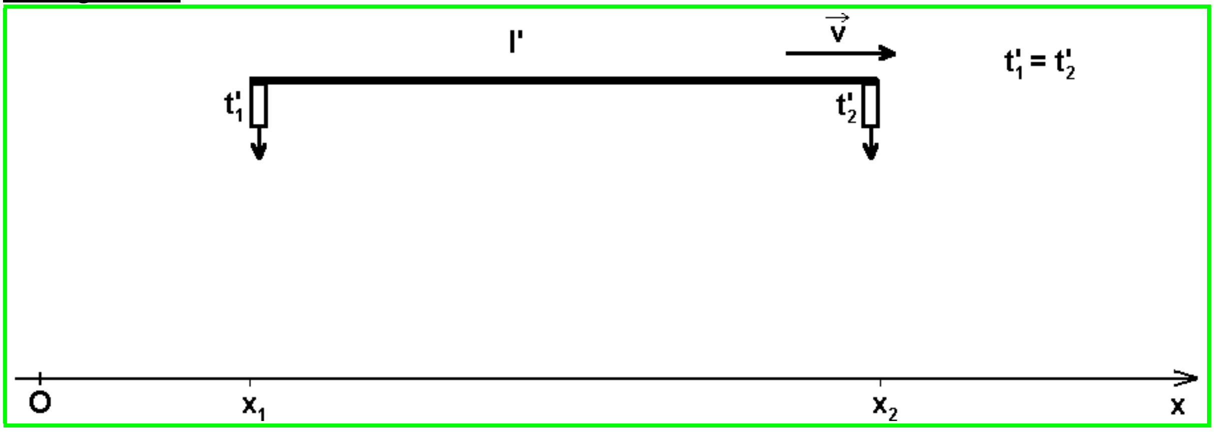
Oznacza to, że zjawiska jednoczesne w jednym układzie odniesienia na ogół nie są jednoczesne w innym, poruszającym się względem pierwszego. <u>Jednoczesność zdarzeń jest względna</u>.

Zdarzenia zachodzące w różnych miejscach, x_1 i x_2, są jednoczesne w danym układzie, jeżeli sygnały świetlne wysłane z tych miejsc w momencie zdarzeń docierają w tej samej chwili do punktu o współrzędnej $x_0 = ½·(x_2 + x_1)$.

Zdarzenia zachodzące w jakimś układzie w tej samej chwili i w tym samym miejscu $t_2 = t_1$ i $x_2 = x_1$ są jednoczesne we wszystkich innych układach w każdym zachodzą w tym samym miejscu.

Ze względu na relatywizm wyników pomiarów wprowadza się pojęcia długości własnej, czasu własnego, itd.
Długość własna jest długością obiektu mierzoną w układzie, w którym obiekt spoczywa.
Czas własny jest czasem mierzonym przez zegar spoczywający w danym układzie.

<u>Przykład: Jak względność jednoczesności zdarzeń wpływa na pomiary odległości.</u>



Poruszająca się nad powierzchnią rakieta wypala dwa ślady na powierzchni gruntu, strzelając jednocześnie z dwóch „dział laserowych”.

$$x'_2 - x'_1 = l' \qquad t'_2 = t'_1 \tag{E 7-6}$$

$$(x_2, t_2) \qquad (x_1, t_1) \qquad ? \tag{E 7-7}$$

$$x_2 = \frac{x_2' + vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad x_1 = \frac{x_1' + vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{E 7-8}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{E 7-9}$$

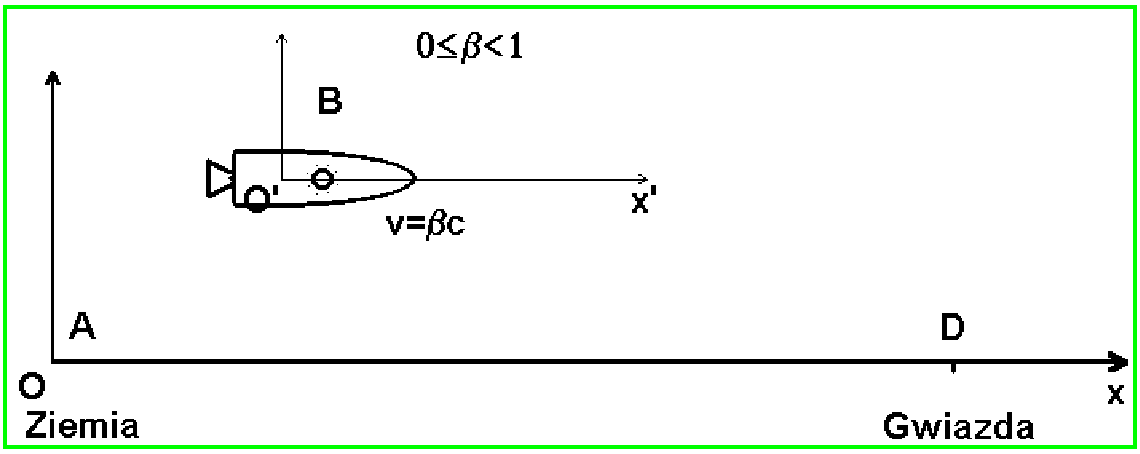
$$\Delta x > l'$$

$$t_2 = \frac{t_2' + x_2' \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t_1 = \frac{t_1' + x_1' \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{E 7-10}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l' \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq 0 \tag{E 7-11}$$

Dla obserwatora stojącego na powierzchni wybuchy nie nastąpiły jednocześnie: działo rufowe wypaliło wcześniej od dziobowego.
Dla obserwatora w rakiecie ślady na powierzchni powstają jednocześnie i odległość między nimi jest równa długości rakiety *l'*.

8. Paradoks bliźniąt - astronautów



Bliźniak B wyrusza rakietą do Gwiazdy odległej o D. Dla niego:

$$D' = D \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

i czas potrzebny na podróż:

$$t' = \frac{D'}{\beta \cdot c} = \frac{D \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{\beta \cdot c} \qquad \text{(E 8-12)}$$

Dla B podróż zaczyna się zdarzeniem $(0,0)$ i kończy $(0,t')$.

Jeżeli przeliczymy te wartości do układu bliźniaka A, to początek wypada w $(0,0)$ a koniec w

$$x = \frac{x' + \beta c t'}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$\frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{D\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} = D \qquad \text{(E 8-13)}$$

$$t = \frac{t' + x' \cdot \beta / c}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$\frac{D\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{D}{\beta c} \qquad \text{(E 8-14)}$$

czyli w $\left(D, \frac{D}{\beta \cdot c} \right)$ (E 8-15)

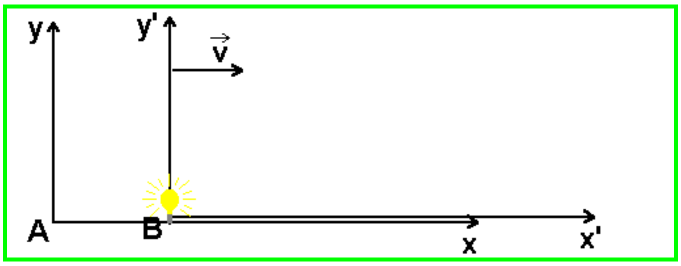
D = 40 [a]c lat świetlnych
β = 0,99 99% prędkości światła

$$t = \frac{D}{\beta \cdot c} = \frac{40[a] \cdot c}{\beta \cdot c} = 40{,}4[a] \qquad \text{(E 8-16)}$$

$$\begin{cases} D' = 5{,}64[a] \cdot c & (14{,}1\%\ D) \\ t' = \dfrac{D'}{\beta \cdot c} = 5{,}7[a] & \end{cases} \qquad \text{(E 8-17)}$$

Po dotarciu do Gwiazdy bliźniak B zawraca i odbywa podróż powrotną. W jakim wieku będą bliźniacy A i B przy ponownym spotkaniu na Ziemi?

Relatywistyczny efekt Doppler'a (dla światła)



lampa błyskowa sprzężona z sekundnikiem poruszającego się zegara wysyła prostokątną falę świetlną

Jaką częstość błysków f zarejestruje obserwator A?

$$f' = f_0 = 1\,\mathrm{Hz} \qquad \Delta t' = 1\,\mathrm{s} \tag{E 8-18}$$

Pierwszy błysk pojawia się w chwili gdy A i B pokrywają się. Drugi błysk w A pojawi się po czasie T.
Drugi błysk ma w A współrzędne:

$$t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad x = v \cdot \Delta t \tag{E 8-19}$$

$$T = t + \frac{\Delta x}{c} =$$

$$\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot c} =$$

$$\frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t' \tag{E 8-20}$$

$$T = \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \cdot \Delta t' = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \cdot T' \tag{E 8-21}$$

Wzór Doppler'a (relatywistyczny)

(przy oddalaniu się prędkość ma znak dodatni)

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \cdot f_0} \tag{E 8-22}$$

Paradoks bliźniąt – inaczej

Obu bliźniaków zaopatrujemy w dokładne zegary, każdy sterujący pracą lampy błyskowej (albo radiowego nadajnika impulsów). Teraz każdy może ocenić wiek brata, i swój, licząc docierające do niego błyski (lub impulsy nadajnika).
Oznaczamy przez f_0 częstotliwość własną nadajnika.

Bliźniak B (podróżujący):
Naliczy w podróży tam $T' = 5{,}7$ lat i $T' = 5{,}7$ lat w podróży z powrotem … liczba błysków własnej lampy wyniesie

$$2T' \cdot f_0$$

Bratu **A** naliczy błysków

$$T'\left(f_0 \cdot \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} + f_0 \cdot \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \right) = T' \cdot f_0 \frac{(1-\beta)+(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$\frac{2T' f_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

co odpowiada czasowi 80,8 lat.

Bliźniak A (pozostający na Ziemi):
Naliczy swoich lat $T = 40{,}4$ lat i $T = 40{,}4$ lat czyli razem $80{,}8$ lat, co odpowiada liczbie błysków

$$2T \cdot f_0$$

Bratu **B** naliczy
1. przy oddalaniu się częstotliwość odbieranych błysków wyniesie

$$f_0 \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

   i będą odbierane przez czas podróży tam oraz czas potrzebny ostatniemu błyskowi na pokonanie odległości D, co razem wyniesie

$$T + T \cdot \beta$$

   a liczba błysków

$$f_0 \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot (1+\beta) \cdot T = T \cdot f_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

2. w czasie zbliżania się częstotliwość wyniesie

$$f_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

ale czas ich odbierania będzie znacznie krótszy, bo brat B jest tylko niewiele wolniejszy od światła i ostatni błysk dotrze razem z nim

$$T - T \cdot \beta$$

co da liczbę błysków

$$f_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot (1-\beta) \cdot T = T \cdot f_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

a razem

$$2T \cdot f_0 \sqrt{1-\beta^2} \to 11{,}4 \text{ lat}$$

Bliźniacy będą zatem zgodni w kwestii swojego wieku; **B** powróci młodszy o około 70 lat od **A**.