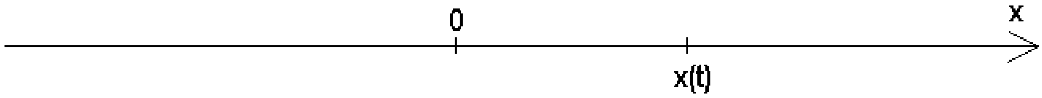
1. Kinematyka ruchu wzdłuż prostej

Położenie



Prędkość

Prędkość średnia $v_{sr} \equiv \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\begin{matrix} v = \text{const.} \\ v = v_{sr} \end{matrix} \Rightarrow x(t) = x_0 + v \cdot t$$

Prędkość chwilowa $v(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$

Przyspieszenie

Przyspieszenie średnie $a_{sr} \equiv \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

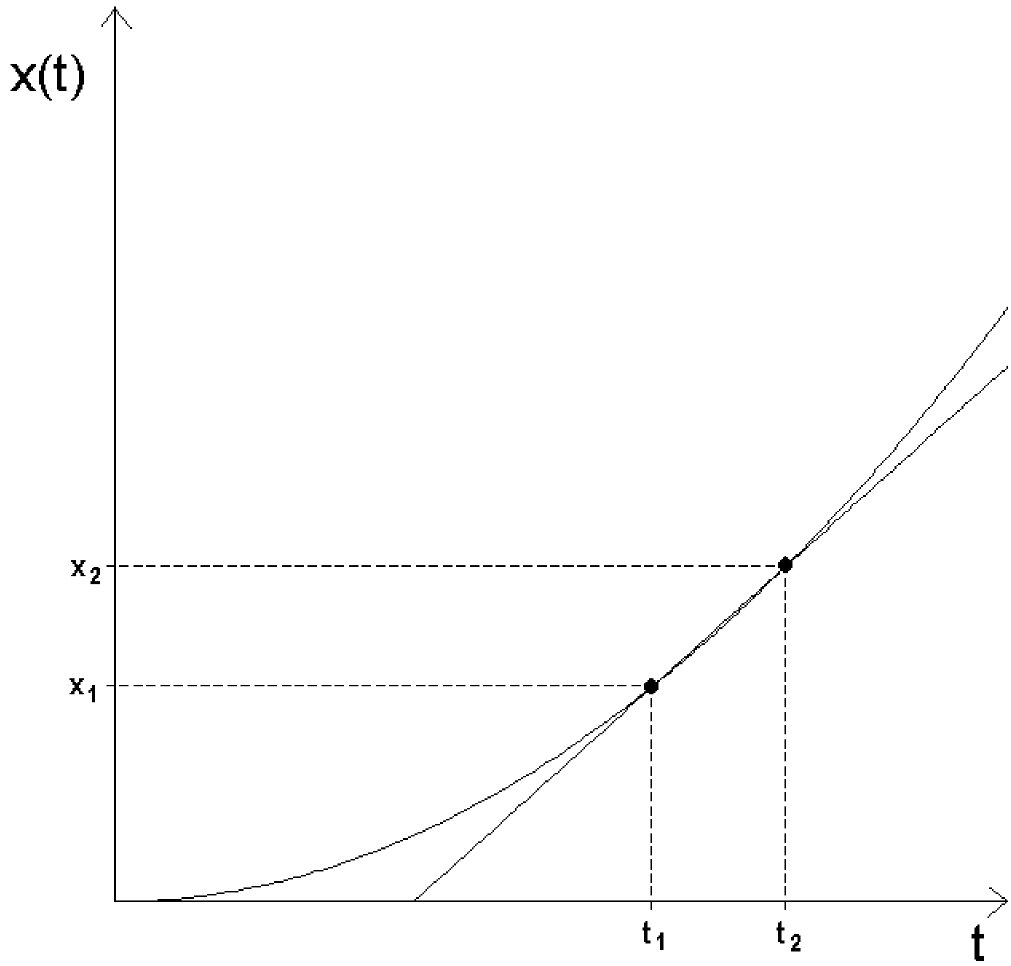
Przyspieszenie chwilowe

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = x''(t) = \frac{d^2\,x(t)}{dt^2}$$

Przykład: ruch zmienny

$$x(t) = c \cdot t^2$$

$$v(t) = \frac{d\ x(t)}{dt} = 2c \cdot t$$



Przykład: ruch jednostajnie przyspieszony

$$\begin{matrix} a = \text{const.} \\ a = a_{sr} \end{matrix} \Rightarrow v(t) = v_0 + a \cdot t$$ z definicji przyspieszenia średniego

$$x(t) = ?$$

z definicji prędkości średniej

$$x(t) = x_0 + v_{sr}(t) \cdot t$$

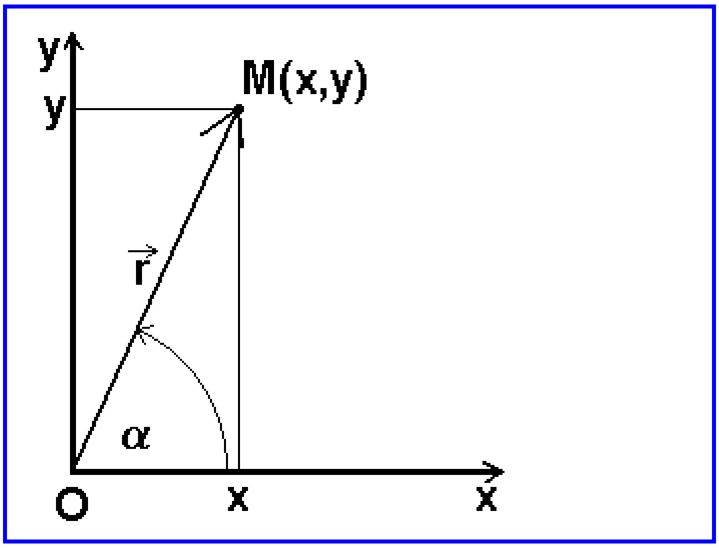
$$v_{sr}(t) = \frac{v_0 + v(t)}{2}$$ ponieważ prędkość zależy liniowo od czasu

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 + v(t)}{2} \cdot t$$ ale $v(t) = v_0 + a \cdot t$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + a \cdot t) \cdot t = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

2. Kinematyka ruchu w płaszczyźnie

Wektor położenia punktu na płaszczyźnie



$\vec{r}(x,y)$ – wektor położenia

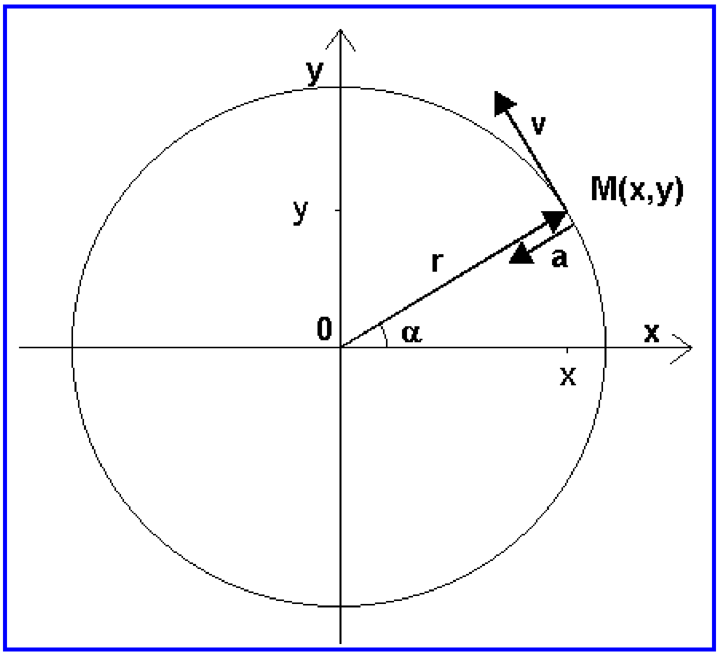
$x = r \cdot \cos\alpha$

$y = r \cdot \sin\alpha$

$\vec{r}(x,y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$

$\vec{i}, \vec{j}$ - wersory osi x i y

Ruch jednostajny po okręgu



$$\alpha = \omega \cdot t$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y = r \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Prędkość w ruchu po okręgu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = r \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\vec{v} \perp \vec{r} \qquad v = \omega \cdot r$$

Przyspieszenie w ruchu po okręgu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = -x \cdot \omega^2 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -y \cdot \omega^2 \end{cases}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{r} \qquad a = \omega^2 \cdot r \qquad \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \vec{a} \perp \vec{v}$$

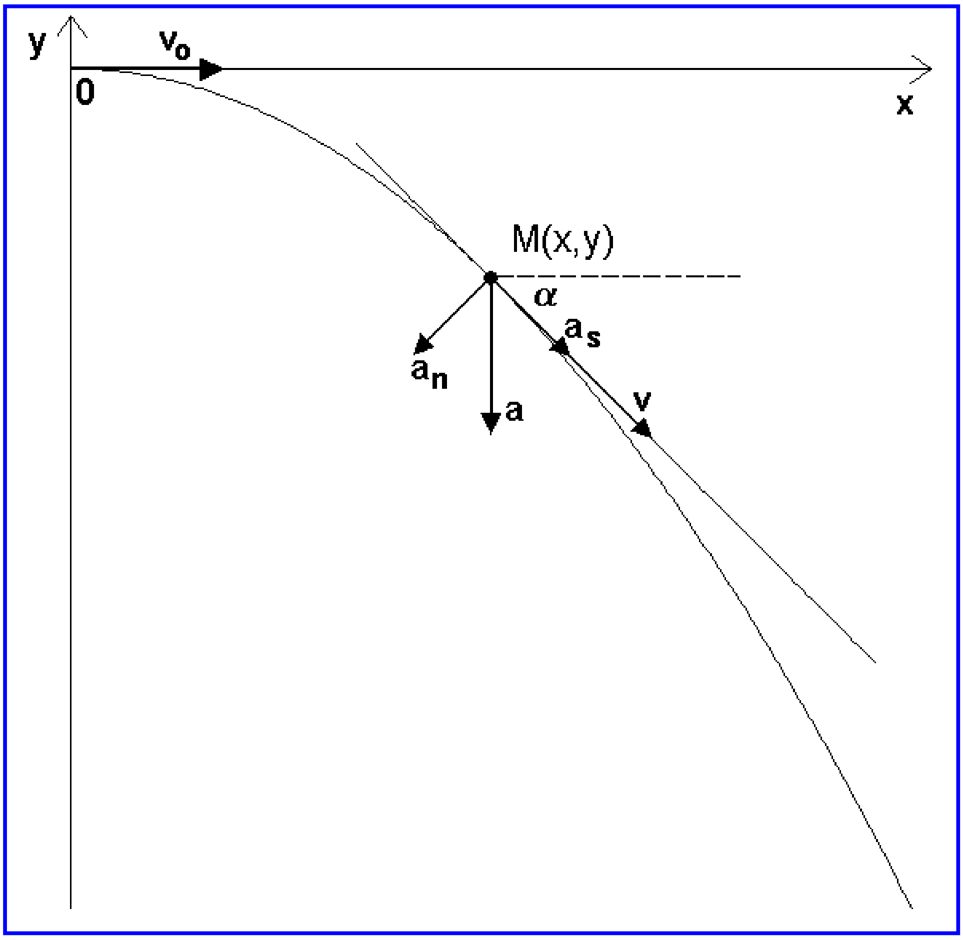
<u>Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru ruchu.</u>

$$\boxed{\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t}$$

Przyspieszenie normalne (dośrodkowe) do toru ruchu zawsze wynosi:

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$ gdzie R jest promieniem krzywizny toru.

Rzut poziomy



W chwili początkowej $t = 0$

$\vec{r}_0(0,0)$

$\vec{v}_0(v_0,0)$

przyspieszenie w tym ruchu jest przyspieszeniem spadku swobodnego

$\vec{a}(0,-g)$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d\, v_x}{dt} = 0 & \Rightarrow\ v_x = \mathrm{const.} = v_0 \\ a_y = \dfrac{d\, v_y}{dt} = -g & \Rightarrow\ v_y = -g \cdot t + C_{=0} = -g \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{d\,\mathrm{x}}{dt} = v_0 & \Rightarrow\ x = v_0 \cdot t + C_{=0} = v_0 \cdot t \\ v_y = \dfrac{d\,y}{dt} = -g \cdot t & \Rightarrow\ y = -g \cdot \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

równanie parametryczne toru ruchu

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = -\dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases}$$ po przekształceniach $$y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

prędkość w tym ruchu

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}}$$

$$a_n = g \cdot \cos\alpha = \frac{g \cdot v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}} = g\,\frac{v_0}{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \ \Rightarrow\ \frac{v^3}{g \cdot v_0} = R$$ promień krzywizny toru

$$a_s^2 + a_n^2 = g^2 \ \Rightarrow\ a_s = g\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}} \qquad a_s \xrightarrow[t\to\infty]{} g$$