

NIEPEWNOŚĆ POMIARÓW POŚREDNICH DLA DUŻYCH NIEPEWNOŚCI WIELKOŚCI MIERZONYCH

Prawa propagacji niepewności przedstawionego na poprzednim wykładzie nie można zastosować w sytuacji gdy niepewności wyników pomiarów bezpośrednich są na tyle duże, iż w ich zakresie wyraźnie uwidacznia się nieliniowość zależności pomiędzy wielkością wyznaczaną pośrednio, a wielkościami mierzonymi wykorzystywanymi do jej wyznaczenia.

Rozkład prawdopodobieństwa wielkości wyznaczanej pośrednio nie jest w takim przypadku rozkładem Gaussa.

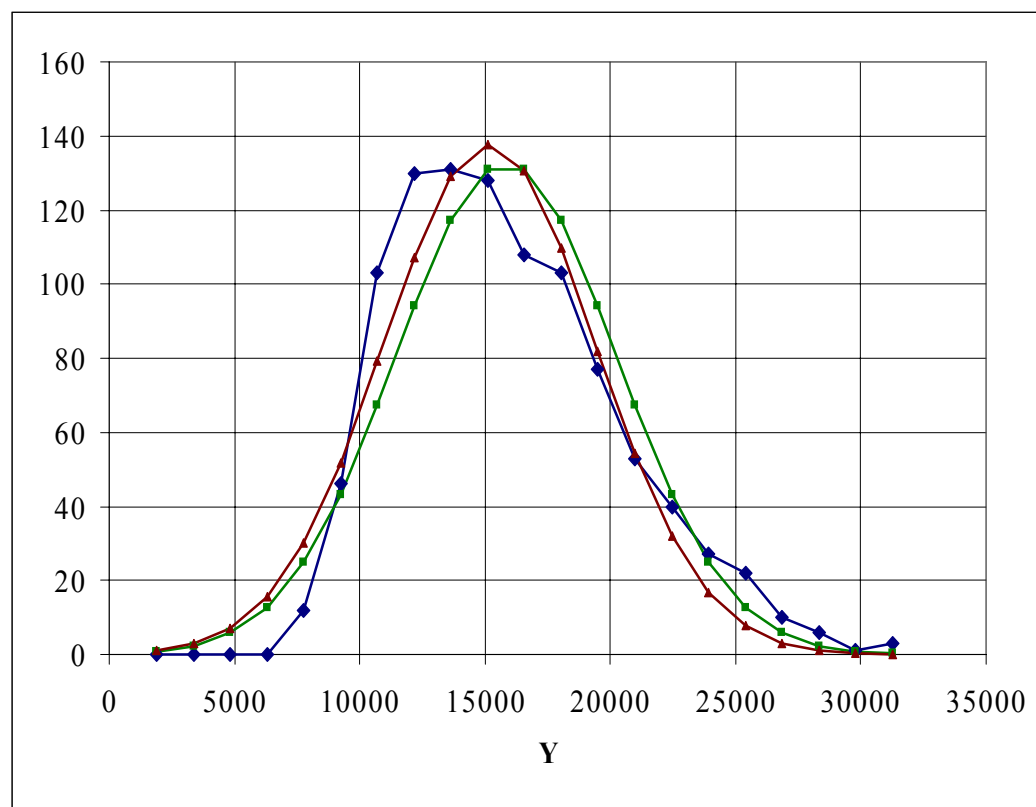
Rozkład prawdopodobieństwa dla wielkości $y=x^4+5000$.

Zmienna x ma rozkład Gaussa $N(10,1)$

Niebieska linia - rzeczywisty rozkład zmiennej y wyznaczony na podstawie 1000 pomiarów.

Linia brązowa - rozkład Gaussa o parametrach odpowiadających wartościom $y=x^4+5000$ oraz $u(y)$ określonego przy pomocy prawa propagacji niepewności.

W takim przypadku konieczne jest wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa wielkości wyznaczanej pośrednio.



METODA ZAMIANY ZMIENNYCH

Założmy, że wielkość wyznaczana pośrednio - y jest funkcją x tzn. $y=y(x)$. Oznaczmy poprzez $f(x)$ rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej x , a poprzez $f_y(y)$ rozkład gęstości prawdopodobieństwa wielkości y .

Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że każdej wartości y odpowiada jedna wartość x to możemy zauważyć, iż każdy z przedziałów $[x, x+dx]$ przechodzi w wyniku wyznaczenia wielkości y w przedział $[y, y+dy]$. Ponieważ prawdopodobieństwo musi być przy tym zachowane możemy napisać:

$$f_y(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx$$

a zatem otrzymamy:

$$f_y(y) = f(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Powyższą zależność można wykorzystać w celu analitycznego wyznaczenia rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $f_y(y)$.

Jeżeli pojedynczej wartości y odpowiada kilka różnych wartości x - tzn. przedziałowi $[y, y+dy]$ odpowiada kilka przedziałów $[x_j, x_j+dx_j]$, gdzie $j=1, 2, \dots, n$, to powyższa zależność przyjmuje postać:

$$f_y(y) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \left| \frac{dx_j}{dy} \right|$$

METODA MONTE CARLO

Metoda Monte Carlo stosowana jest w celu liczbowej symulacji różnego rodzaju zjawisk, zazwyczaj w przypadkach, gdy opis analityczny zjawiska jest bardzo skomplikowany.

W przypadku analizy pomiarów metoda Monte Carlo polega na losowaniu wyników pomiarów podlegających założonemu rozkładowi i może być wykorzystywana do symulacji procesu pomiaru. Symulowanie pomiaru wielkości wyznaczonej pośrednio polega na losowaniu wyników pomiarów wielkości mierzonych bezpośrednio (o rozkładzie normalnym), a następnie wyliczaniu na ich podstawie wartości interesującej nas wielkości. Powtórzenie takiej procedury kilka tysięcy razy daje w rezultacie dobre odwzorowanie rozkładu prawdopodobieństwa, któremu podlega wielkość wyznaczana pośrednio.

W celu przeprowadzenia losowania jest jednak potrzebny generator liczb o rozkładzie Gaussa, a podstawowym generatorem liczb losowych (dostępnym np. w standardowym oprogramowaniu komputerowym) jest generator o rozkładzie równomiernym. Prosty generator liczb losowych o rozkładzie normalnym można jednak skonstruować z wykorzystaniem generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym w oparciu o **centralne twierdzenie graniczne**.

Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG)

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana zmiennej x_i wynosi $E(x_i)$, a jej wariancja $V(x_i)$ to zmienna z określona wzorem

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n E(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n V(x_i)}}$$

ma w granicy dla dużych n rozkład normalny Gaussa o wartości oczekiwanej wynoszącej 0 i wariancji równej 1.

Zbieżność ta jest na tyle szybka, że już dla wartości n wynoszącej 4-5 rozkład zmiennej z można uznać za gaussowski.

Prosty generator liczb losowych o rozkładzie Gaussa można zatem skonstruować dodając do siebie kilka liczb generowanych z rozkładem równomiernym. Jednakże do zastosowań badawczych wymagane są bardziej zaawansowane metody.