

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI METODĄ TYPU B

W przypadku gdy nie występuje statystyczny rozrzut wyników (wszystkie pomiary dają ten sam wynik) niepewność pomiaru wyznaczamy w inny sposób. Główną przyczyną niepewności pomiaru jest niepewność przyrządu pomiarowego (niepewność wzorcowania).

Przyrząd pomiarowy powinien gwarantować taką dokładność aby wynik pomiaru x różnił się od wartości rzeczywistej nie więcej niż o działkę elementarną - $\Delta_p x$, czyli odstęp sąsiadujących kresek podziałki. Dla przyrządów cyfrowych działka elementarna odpowiada jednostce dekady wskazującej najmniejszą wartość.

Dokładność przyrządów może być też określona przez producenta w inny sposób np.

- dla mierników elektromagnetycznych

$$\Delta_p x = C \cdot \text{zakres} / 100$$

C - klasa

- dla mierników cyfrowych

$$\Delta_p x = (C_1 \cdot x + C_2 \cdot \text{zakres}) / 100$$

C_1, C_2 - stałe podane przez producenta

Tak określona dokładność jest równoznaczna pojęciu niepewności maksymalnej.

Wiemy, że odchylenie wyniku pomiaru x od wartości rzeczywistej nie wykracza poza przedział $\pm \Delta_p x$ tzn. wartość rzeczywista zawiera się na pewno w przedziale $(x - \Delta_p x, x + \Delta_p x)$. W najprostszym przypadku możemy przyjąć, że prawdopodobieństwo uzyskania dowolnej wartości z tego przedziału jest takie samo – tzn. opisuje je rozkład równomierny (jednorodny).

Niepewność określamy w takim przypadku wyznaczając estymator dyspersji (odchylenie standardowe) wspomnianego rozkładu równomiernego.

Rozkład równomierny opisany jest funkcją:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq b \end{cases}$$

a jego dyspersja wynosi:

$$D(x) = \frac{b-a}{12}$$

Zatem ponieważ w rozważanym przypadku $b-a = \Delta_p x$ niepewność będzie wynosiła:

$$u(x) = \frac{\Delta_p x}{\sqrt{3}}$$

Zaletą takiego podejścia w porównaniu ze stosowaną dotychczas metodą posługiwania się w niepewnością maksymalną jest spójność pojęciowa niepewności wyznaczanej metodą A i B – obie opisywane są za pomocą estymatora dyspersji.

W niektórych przypadkach można do wyliczenia niepewności typu B stosować inne rozkłady prawdopodobieństwa – np. trójkątny lub trapezowy.

Ponadto metodę tą można stosować także przy innych zagadnieniach jak określanie niepewności eksperymentatora (np. związanej z wahaniami wskazań przyrządu) lub niepewności wielkości zaczerpniętych z literatury.

NIEPEWNOŚĆ CAŁKOWITA

Niepewność całkowitą wyznaczamy uwzględniając wszystkie czynniki określające niepewność tzn. niepewność wynikającą z rozrzutu statystycznego wyników pomiarów, niepewność przyrządu pomiarowego a także niepewność eksperymentatora.

Najczęściej mamy jednak do czynienia z dwoma pierwszymi czynnikami.

Niepewność całkowitą wyliczamy w oparciu o prawo dodawania dyspersji (wariancji).

Dla zmiennych losowych niezależnych:

$$V(x_1 + x_2) = V(x_1) + V(x_2)$$

$$D(x_1 + x_2) = \sqrt{[D(x_1)]^2 + [D(x_2)]^2}$$

Możemy zatem zapisać:

$$u_c(x) = \sqrt{[u_r(x)]^2 + [u_p(x)]^2}$$

lub:

$$u_c(x) = \sqrt{(s_{\bar{x}})^2 + \frac{1}{3}(\Delta_d x)^2}$$

gdzie: $u_c(x)$ – niepewność całkowita,

$u_r(x)$ – niepewność obliczona z rozrzutu statystycznego serii wyników pomiarów,

$u_p(x)$ – niepewność obliczona inną drogą niż z rozrzutu wyników (w powyższym przypadku na podstawie dokładności przyrządu pomiarowego).

ŚREDNIA WAŻONA

Przedstawiony w poprzednich wykładach przypadek wyznaczania rzeczywistej wartości wielkości mierzonej na podstawie serii pomiarów $x_1, x_2, \dots, x_n$ dotyczył sytuacji, gdy wszystkie pomiary przeprowadzane były w takich samych warunkach tzn. rozkład możliwych wyników każdego z pomiarów $f(x_i, \mu, \sigma)$ miał postać rozkładu Gaussa o tej samej wartości σ . Zastanówmy się jednak nad sytuacją, gdy warunki mające wpływ na rozrzut były różne dla poszczególnych pomiarów z serii. Oznacza to przyjęcie założenia, iż rozkładem możliwych wyników dla każdego z pomiarów x_i jest rozkład Gaussa o innej dyspersji opisywanej przez inną wartość parametru σ_i . Korzystając z metody największej wiarygodności wyliczymy jakim wzorem będzie w tym przypadku opisany estymator wartości oczekiwanej.

Rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla każdego z pomiarów x_i opisuje wzór:

$$f(x_i, \mu, \sigma_i) = \frac{1}{\sigma_i \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

Funkcja wiarygodności będzie miała w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma_i \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right) \right] = \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right] \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left[- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

Pochodna funkcji wiarygodności po μ będzie wynosiła:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\partial \mu} &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left[- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2} \right] \cdot (-1) \left(\sum_{i=1}^n 2 \cdot \frac{x_i - \mu}{2\sigma_i^2} \right) \cdot (-1) = \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left[- \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2} \right] \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma_i^2} \right) \end{aligned}$$

W celu znalezienia estymatora wartości oczekiwanej szukamy takiej wartości μ_m , dla której powyższa pochodna jest równa zero, co jest równoznaczne z faktem, że równe zero jest wyrażenie w nawiasie ostatnie od prawej strony:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_m}{\sigma_i^2} = 0$$

Po przekształceniach otrzymamy:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) - \mu_m \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = 0$$

$$\mu_m = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Zatem estymator wartości oczekiwanej (oznaczymy go przez x_{srw}) można w rozważanym przypadku przedstawić wzorem:

$$x_{\text{srw}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Jest to szczególny przypadek **średniej ważonej**

$$x_{\text{srw}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

gdzie waga w_i jest równa:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Wzorem tym możemy się posłużyć jeżeli znana jest dyspersja rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych pomiarów - σ_i (np. uśrednianie wyników pomiarów przeprowadzonych za pomocą przyrządów o różnej dokładności) lub wartość dyspersji możemy oszacować na podstawie pomiarów (uśrednianie kilku wyników średnich z serii pomiarowej).

Elementarne przekształcenia wzoru na średnią ważoną pozwalają wykazać, że dyspersja x_{srw} , a co za tym idzie niepewność wyznaczenia tej średniej wynosi:

$$u(x_{\text{srw}}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$