

ESTYMATOR WARIANCJI I DYSPERSJI

Oznaczmy: μ – wartość oczekiwana rozkładu gaussowskiego wyników pomiarów
(wartość prawdziwa mierzonej wielkości)

σ – dyspersja rozkładu wyników pomiarów

x_i – wyniki serii n pomiarów ($i = 1, \dots, n$)

Stosując metodę największej wiarygodności możemy wykazać, że estymator wariancji określony jest wzorem:

$$s_{\mu}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

Taki estymator okazuje się być najlepszym estymatorem, gdyż jest on zgodny, nieobciążony i najbardziej efektywny. Wadą tak zdefiniowanego estymatora jest jednak to, że występuje w nim wartość μ , której zazwyczaj nie znamy.

Oczywiście możemy wartość oczekiwaną zastąpić wielkością, którą znamy czyli wartością średnią (estymatorem wartości oczekiwanej). Otrzymamy wówczas wzór:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{sr})^2}{n}$$

Taki estymator jest jednak estymatorem obciążonym.

Jest tak, gdyż powyższy wzór określa rozrzut pomiarów wokół wartości średniej, a nie wokół wartości oczekiwanej.

Wzór na s_{μ} możemy oczywiście wykorzystać, gdy znamy μ – tzn. wyliczamy wariancję w oparciu o dane dotyczące wszystkich elementów populacji. s_{μ} nazywa się odchyleniem standardowym z populacji.

Spróbujmy wyliczyć związek pomiędzy wariancją pomiarów wokół wartości oczekiwanej μ a wariancją wokół wartości średniej x_{sr} .

Oznaczmy: $V(x)$ – wariancja x wokół wartości oczekiwanej μ ,

$V_{xsr}(x)$ – wariancja x wokół wartości średniej x_{sr} ,

$V(x_{sr})$ – wariancja wartości średniej wokół wartości oczekiwanej.

Na rozrzut pomiarów wokół wartości oczekiwanej μ składa się rozrzut pomiarów wokół wartości średniej x_{sr} oraz rozrzut wartości x_{sr} wokół μ .

Zgodnie z prawem dodawania wariancji możemy więc zapisać:

$$V(x) = V(x_{sr}) + V_{xsr}(x)$$

Jeżeli na podstawie wcześniejszych obliczeń podstawimy:

$$V(x_{sr}) = \frac{1}{n} V(x)$$

to:

$$V(x) = \frac{1}{n} V(x) + V_{xsr}(x)$$

$$V(x) - \frac{1}{n} V(x) = V_{xsr}(x)$$

$$\frac{(n-1) \cdot V(x)}{n} = V_{xsr}(x)$$

$$V(x) = \frac{n}{n-1} \cdot V_{xsr}(x)$$

Zatem właściwym estymatorem $V(x)$ będzie:

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

Po podstawieniu za s^2 otrzymamy:

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{sr})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{sr})^2}{n-1}$$

Taki estymator wariancji jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym.

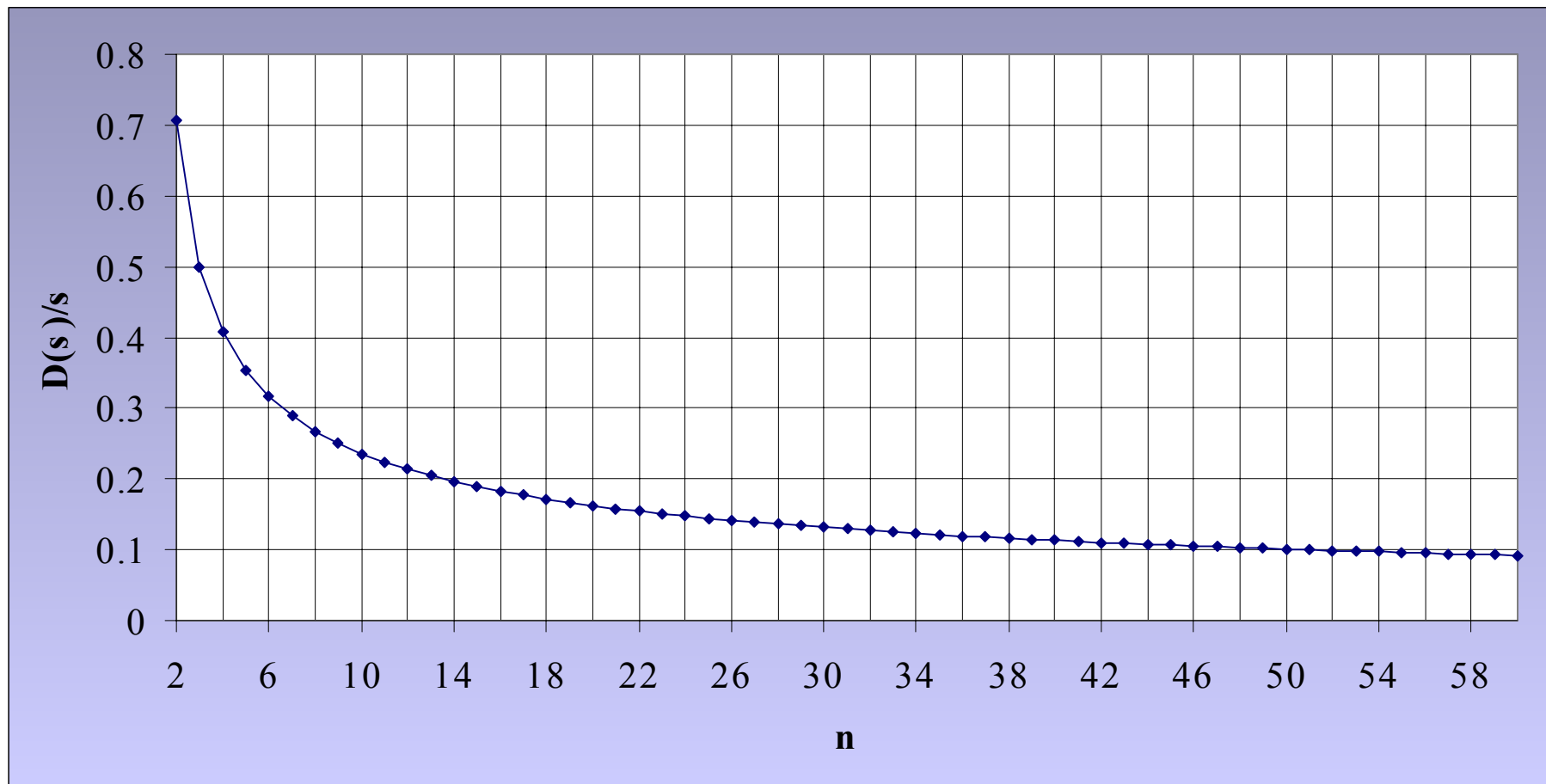
Estymatorem dyspersji będzie oczywiście pierwiastek z estymatora wariancji:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{sr})^2}{n-1}}$$

Estymator dyspersji określony powyższym wzorem nazywamy odchyleniem standardowym pojedynczego pomiaru lub po prostu odchyleniem standardowym (z próby).

Odchylenie standardowe jako funkcja zmiennej losowej również jest zmienną losową – należy zatem pamiętać, że jest ono tylko oszacowaniem dyspersji pomiarów oraz, że możemy określić dyspersję (rozrzut statystyczny) tego oszacowania.

DYSPERSJA ODCHYLENIA STANDARDOWEGO



ODCHYLENIE STANDARDOWE WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Ponieważ:

$$V(x_{sr}) = \frac{1}{n} V(x)$$

Zatem estymatorem wariancji wartości średniej będzie:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n} \cdot s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}$$

A estymatorem dyspersji wartości średniej:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Powyższe wyrażenie nazywamy odchyleniem standardowym wartości średniej

Odchylenie standardowe wartości średniej jako funkcja zmiennej losowej jest zmienną losową. Oznacza to, że podobnie jak odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru jest ono tylko oszacowaniem dyspersji wartości średniej a nie dokładną wartością tej dyspersji.

Odchylenie standardowe średniej przyjmowane jest jako niepewność pomiaru.

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI METODĄ TYPU A

Wynik pomiarów określamy jako wartość średnią z serii pomiarów.

Niepewność standardową pomiaru (wyznaczenia wartości średniej) określamy podając wartość odchylenia standardowego wartości średniej i oznaczamy $u(x)$.

Taki sposób wyznaczania niepewności (tzn. w oparciu o serię wyników pomiarów, przy których występuje rozrzut statystyczny) nazywany jest **obliczaniem niepewności metodą A**.

Obliczanie niepewności metodą typu B jest to metoda obliczania niepewności pomiarowej drogą inną niż w przypadku A (np. na podstawie założonego rozkładu statystycznego).

Niepewność podajemy z dokładnością do ograniczonej liczby cyfr znaczących, ponieważ wartość którą znamy jest tylko przybliżonym oszacowaniem. *Guide to Expression of Uncertainty* określa, że niepewność powinna być podawana z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.