

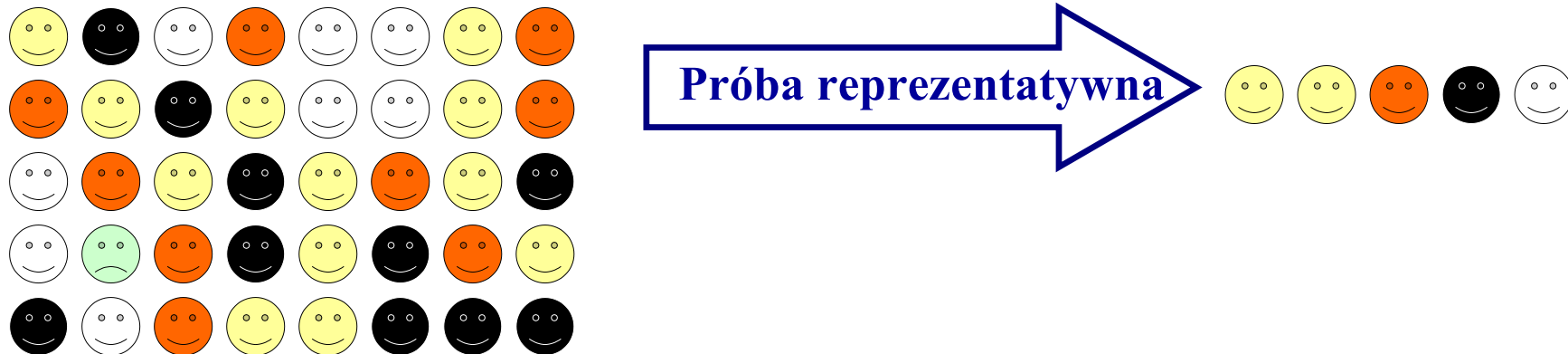
POPULACJA I PRÓBA

POPULACJĄ w statystyce matematycznej nazywamy zbiór wszystkich elementów (zdarzeń elementarnych) charakteryzujących się badaną cechą opisywaną zmienną losową.

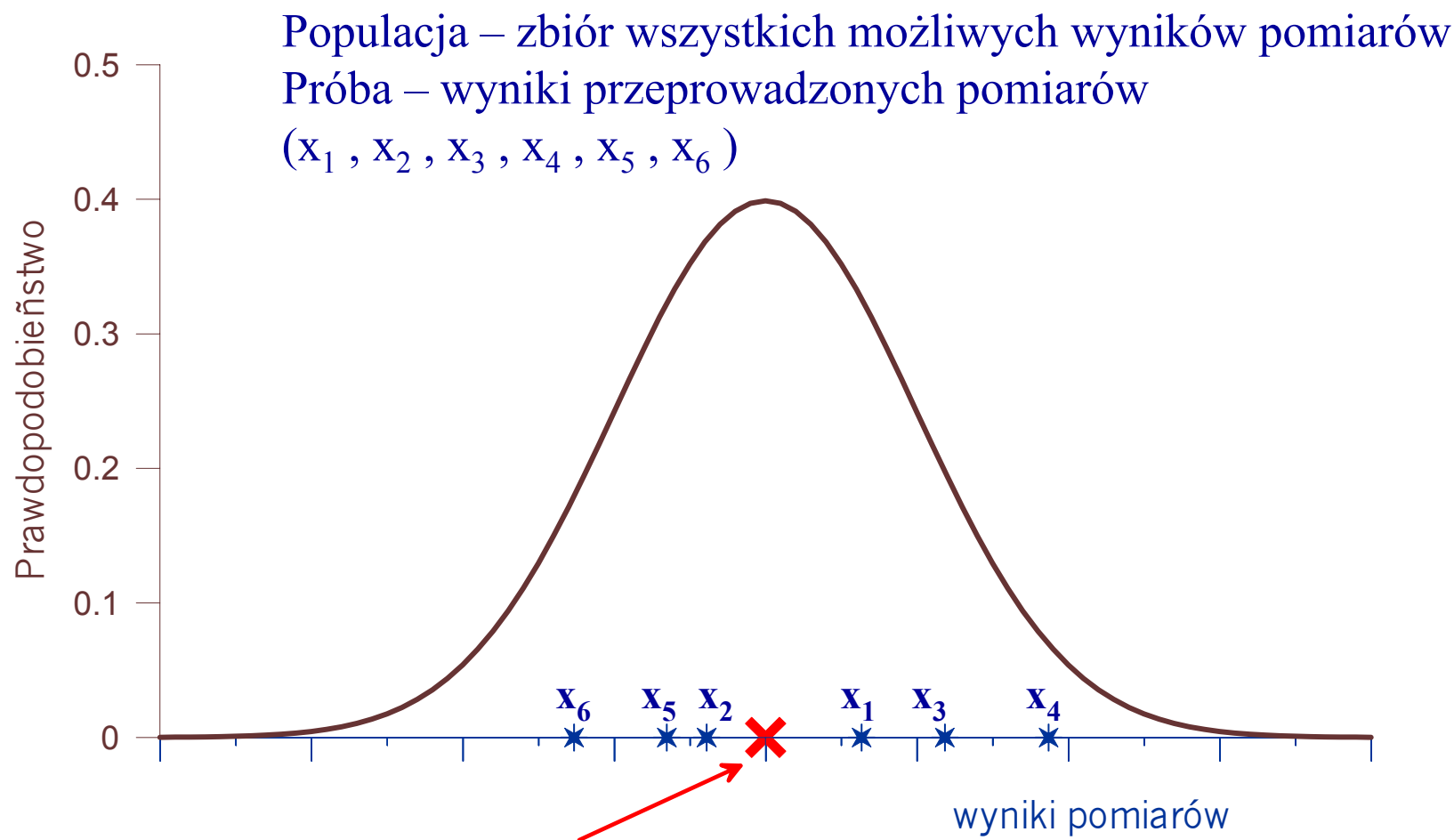
Zbadanie całej populacji (przeprowadzenie tzw. *badania wyczerpującego*) w celu określenia rozkładu zmiennej losowej związanej z badaną cechą lub jego parametrów częstokroć nie jest możliwe.

W takim przypadku przeprowadza się badania PRÓBY - tzn. wybranej części populacji. Podstawowym warunkiem, który gwarantuje poprawność wniosków o całej populacji jest tzw. reprezentatywność próby.

PRÓBĄ REPREZENTATYWNĄ nazywamy próbę o strukturze bardzo zbliżonej do struktury całej populacji. Najlepszą metodą zapewnienia reprezentatywności próby jest jej stworzenie poprzez całkowicie losowy wybór elementów populacji.



POPULACJA I PRÓBA W ODNIESIENIU DO POMIARU



Rzeczywista wartość mierzonej wielkości – x_0 , będąca wartością oczekiwaną rozkładu prawdopodobieństwa opisującego całą populację poszukiwany parametr rozkładu zmiennej losowej dla całej populacji

ESTYMACJA

- oznacza oszacowanie wielkości (parametrów) opisujących pewne cechy populacji na podstawie próby.

CECHY DOBRYCH ESTYMATORÓW:

1. ZGODNOŚĆ ESTYMATORA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Q_n - Q| < \varepsilon\} = 1$$

gdzie: ε – dowolnie mała liczba dodatnia,
 Q – parametr estymowany,
 Q_n – estymator z n-elementowej próby.

Jest to tzw. zbieżność stochastyczna.

2. NIEOBCIĄŻONOŚĆ

$$E(Q_n) = Q$$

Dla estymatorów obciążonych definiujemy *obciążenie* jako $B_n = E(Q_n) - Q$

3. EFEKTYWNOŚĆ

Estymator najbardziej efektywny Q_n^* to taki, który ma najmniejszą dyspersję (wariancję) spośród wszystkich możliwych estymatorów obliczonych z próby n-elementowej.

$$W(Q_n) = \frac{V(Q_n^*)}{V(Q_n)}$$

METODA NAJWIĘKSZEJ WIARYGODNOŚCI

Wzory, które pozwolą nam wyznaczyć estymatory poszukiwanych parametrów możemy wyprowadzić stosując metodę największej wiarygodności.

Założmy, że przeprowadziliśmy n pomiarów pewnej wielkości (wylosowaliśmy próbę n -elementową) i w otrzymaliśmy w ich wyniku następujące wartości: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru wartości x_i (a dokładniej z przedziału $[x_i, x_i+dx]$) jest równe: $dp(x_i) = f(x_i, \mu, \sigma) \cdot dx$

gdzie $f(x_i, \mu, \sigma)$ jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x_i , w którym występują nieznane nam parametry μ i σ . Ponieważ poszczególne przeprowadzone pomiary możemy uznać za niezależne, prawdopodobieństwo otrzymania (wylosowania z populacji) serii $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ wyznaczymy jako iloczyn prawdopodobieństw

$$dp(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n dp(x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma) \cdot dx_i$$

Funkcja

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma)$$

ma zatem sens rozkładu gęstości prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku serii pomiarów wartości $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Funkcję tą, możemy jednak potraktować jako określającą prawdopodobieństwo, że dla znanej serii wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ nieznane parametry rozkładu przyjmują wartości μ i σ .

Tak określoną wielkość nazywamy wiarygodnością.

Metoda największej wiarygodności nakazuje nam szukać takiej wartości estymowanego parametru, dla której funkcja wiarygodności osiąga maksimum.

ESTYMATOR WARTOŚCI OCZEKIWANEJ

Metoda największej wiarygodności pozwala nam m.in. znaleźć estymator wartości oczekiwanej dla przypadku przeprowadzenia n niezależnych pomiarów (tzn. dla próby n -elementowej) jeżeli rozkład możliwych wyników każdego z pomiarów $f(x_i, \mu, \sigma)$ ma postać rozkładu Gaussa. Ponieważ z wcześniejszych rozważań wiemy, że wartość prawdziwa jest równa wartości oczekiwanej będzie to też wzór pozwalający oszacować rzeczywistą wartość mierzonej wielkości.

Przeprowadźmy zatem odpowiednie wyliczenia:

Przyjmijmy, że przeprowadziliśmy n pomiarów i otrzymaliśmy wyniki $x_1, x_2, \dots, x_n$. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla każdego z pomiarów x_i jest rozkładem Gaussa o tych samych parametrach μ i σ :

$$f(x_i, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Założenie, że parametry μ i σ są takie same dla każdego z pomiarów jest równoznaczne temu, że wszystkie pomiary zostały przeprowadzone w tych samych warunkach.

Funkcja wiarygodności ma zatem postać:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}$$

Pochodna funkcji wiarygodności po μ będzie zatem wynosiła:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma)}{\partial \mu} &= \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2} \right) \cdot \left[\sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) \right] \cdot (-1) = \\ &= \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right] \end{aligned}$$

W celu znalezienia estymatora wartości oczekiwanej szukamy takiej wartości μ_m , dla której powyższa pochodna jest równa zero.

Zauważmy, że może być ona równa zero tylko wtedy, gdy równo zero będzie wyrażenie w nawiasie kwadratowym:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_m) = 0$$

Przekształcając powyższe wyrażenie otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \mu_m = \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \mu_m = 0$$

$$n \cdot \mu_m = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mu_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Otrzymaliśmy w ten sposób **wzór określający estymator wartości oczekiwanej** wyznaczonej na podstawie wyników n niezależnych pomiarów przeprowadzonych w niezmiennych warunkach jeżeli rozkład możliwych wyników każdego z pomiarów jest rozkładem Gaussa.

Jeżeli estymator ten oznaczmy symbolem x_{sr} to możemy zapisać:

$$x_{sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Jest to dobrze znany wzór na średnią arytmetyczną, dlatego też w dalszej części estymator wartości oczekiwanej będzie nazywany właśnie wartością średnią.

Łatwo zauważyć, że estymator ten jest estymatorem zgodnym. Okazuje się, że jest on także nieobciążony i najbardziej efektywny.

Każdy estymator a w szczególności wartość średnia jako funkcja zmiennych losowych sam jest zmienną losową.

Możemy zatem dla dowolnego estymatora (np. wartości średniej) określić takie pojęcia jak rozkład prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana, wariancja czy dyspersja.

W praktyce fakt, że wartość średnia jest zmienną losową oznacza, iż jeśli na podstawie kilku serii pomiarów wyznaczmy wynikające z nich wartości średnie, to będą one cechowały się rozrzutem podobnie jak wartości pojedynczych pomiarów.

WARIANCJA WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Zastanówmy się zatem nad rozrzutem wartości średniej. W tym celu spróbujemy powiązać wariancję wartości średniej z wariancją pojedynczego pomiaru:

$$V(x_{sr}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

Korzystając z zależności $V(ax) = a^2 \cdot V(x)$ oraz $V(x_1 + x_2) = V(x_1) + V(x_2)$ otrzymamy:

$$V(x_{sr}) = \frac{1}{n^2} \cdot V\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n V(x_i)$$

Ponieważ przyjęto, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla każdego z pomiarów x_i jest rozkładem Gaussa o tych samych parametrach, zatem wariancja $V(x_i)$ ma taką samą wartość dla każdego x_i . Jeśli oznaczmy tę wartość jako $V(x)$ możemy napisać:

$$V(x_{sr}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot V(x)$$

$$V(x_{sr}) = \frac{1}{n} \cdot V(x)$$

Rozrzut wartości średniej jest mniejszy od rozrzutu pojedynczych pomiarów i maleje ze wzrostem ilości pomiarów uwzględnionych przy obliczaniu średniej.