

WYNIK POMIARU – JAKO ZMIENNA LOSOWA PODLEGAJĄCA ROZKŁADOWI GAUSSA

Z powodu zaburzeń procesu pomiaru WYNIK POMIARU ma charakter losowy, a zatem możemy go traktować jako ZMIENNĄ LOSOWĄ podlegającą pewnemu rozkładowi.

Najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, gdy losowe zaburzenia wyniku pomiaru spowodowane są przez bardzo wiele czynników, przy czym każdy z tych czynników zaburza wynik w niewielkim stopniu oraz niezależnie od wpływu pozostałych czynników.

W takim przypadku WYNIK POMIARU JEST ZMIENNĄ LOSOWĄ PODLEGAJĄCĄ ROZKŁADOWI GAUSSA.

Powyższy fakt można udowodnić przeprowadzając rozważania nazywane wyprowadzeniem rozkładu Gaussa metodą Hageny.

Założenia:

1. Przypadkowe odchylenia od wartości prawdziwej są nieuchronne.
2. Każde odchylenie jest wynikiem nałożenia bardzo dużej ilości n bardzo małych odchyłeń elementarnych δ , równych co do wartości.
3. Prawdopodobieństwo, że odchylenie elementarne jest dodatnie jest takie samo, jak to że odchylenie jest ujemne.

$$P(+\delta) = P(-\delta) = 0.5$$

4. Chociaż elementarnych odchyłeń jest bardzo dużo to są one na tyle małe, aby rozrzut wyników pomiarów wokół wartości prawdziwej był skończony tzn.

$$n\delta^2 \rightarrow \text{const}, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty \text{ i } \delta \rightarrow 0$$

Oznaczmy poprzez y_k odchylenie (błąd) pomiaru będące wynikiem złożenia $n-k$ odchyłeń elementarnych o $+\delta$ oraz k odchyłeń elementarnych o $-\delta$.

$$y_k = (n - k) \cdot \delta - k \cdot \delta = (n - 2k) \cdot \delta$$

$$P(y_k) = \binom{n}{k} \cdot P(+\delta)^{n-k} \cdot P(-\delta)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

← Liczba możliwych sposobów wystąpienia $n-k$ odchyłeń o $+\delta$ i k odchyłeń o $-\delta$.

Ponieważ przy δ zmierzającym do zera zmienna y_k będzie zmierzała do zmiennej losowej ciągłej, zatem poszukajmy funkcji gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej:

$$f(y_k) = \frac{P(y_k)}{2\delta} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\delta}$$

Najmniejszy przyrost zmiennej y_k odpowiadający zmianie jednego odchylenia elementarnego z $+\delta$ na $-\delta$ (lub odwrotnie).

W celu znalezienia funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(y_k)$ rozważmy zmianę $f(y_k)$ przypadającą na zmianę y_k :

$$\frac{\Delta f(y_k)}{\Delta y_k} = \frac{f(y_k) - f(y_{k+1})}{y_k - y_{k+1}}$$

$$y_k - y_{k+1} = (n - 2k) \cdot \delta - (n - 2k - 2) \cdot \delta = 2\delta$$

$$\begin{aligned} f(y_{k+1}) &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\delta} = \frac{n!(n-k)}{k!(k+1) \cdot (n-k-1)!(n-k)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\delta} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\delta} = \frac{n-k}{k+1} \cdot f(y_k) \end{aligned}$$

zatem:

$$\frac{\Delta f(y_k)}{\Delta y_k} = \frac{f(y_k) - \frac{n-k}{k+1} \cdot f(y_k)}{2\delta} = \frac{f(y_k)}{2\delta} \cdot \left(1 - \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{-f(y_k)}{2\delta} \cdot \frac{n-2k-1}{k+1}$$

Zastąpmy k przez y_k . Ponieważ: $y_k = (n-2k) \cdot \delta$

zatem:

$$\frac{y_k}{\delta} = n - 2k \qquad k = \frac{1}{2} \left(n - \frac{y_k}{\delta} \right)$$

a następnie:

$$\frac{n-2k-1}{k+1} = \frac{n - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(n - \frac{y_k}{\delta} \right) - 1}{\frac{1}{2} \cdot \left(n - \frac{y_k}{\delta} \right) + 1} = \frac{n - n + \frac{y_k}{\delta} - 1}{\frac{1}{2} \left(n - \frac{y_k}{\delta} + 2 \right)} = \frac{\frac{y_k}{\delta} - 1}{\frac{1}{2} \cdot \left(n - \frac{y_k}{\delta} + 2 \right)}$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$\frac{\Delta f(y_k)}{\Delta y_k} = \frac{-f(y_k)}{2\delta} \cdot \frac{n-2k-1}{k+1} = \frac{-f(y_k)}{2\delta} \cdot \frac{\frac{y_k}{\delta} - 1}{\frac{1}{2} \cdot \left(n - \frac{y_k}{\delta} + 2 \right)} = - \frac{f(y_k) \cdot y_k \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{y_k} \right)}{\delta \cdot \left(2 - \frac{y_k}{\delta} + n \right)}$$

$$= - \frac{f(y_k) \cdot y_k \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{y_k} \right)}{\delta \cdot n \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{y_k}{n\delta} + 1 \right)} = - \frac{f(y_k) \cdot y_k \cdot \left(1 - \frac{\delta}{y_k} \right)}{n\delta^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{y_k}{n\delta} + 1 \right)}$$

gdy $\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

wartości odchyłeń y_k stają się zmienną losową ciągłą, możemy więc pominąć indeks k . Rozważając poszczególne człony wyrażenia mamy:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{y} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{y}{n\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{y\delta}{n\delta^2} = 0$$

Z równania

$$\frac{\Delta f(y_k)}{\Delta y_k} = - \frac{f(y_k) \cdot y_k \cdot \left(1 - \frac{\delta}{y_k}\right)}{n\delta^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{y_k}{n\delta} + 1\right)}$$

Uzyskujemy zatem wzór:

$$\frac{df(y)}{dy} = - \frac{f(y) \cdot y}{n\delta^2}$$

Oznaczmy $n\delta^2 = \sigma^2$ i rozwiążmy równanie:

$$\frac{df(y)}{dy} = -\frac{f(y) \cdot y}{\sigma^2}$$

$$\frac{df(y)}{f(y)} = -\frac{y}{\sigma^2} \cdot dy$$

$$\int \frac{df}{f} = -\int \frac{y}{\sigma^2} \cdot dy$$

$$\ln(f) = -\frac{y^2}{2\sigma^2} + C \quad C = \ln A$$

$$\ln(f) - \ln A = \ln\left(\frac{f}{A}\right) = -\frac{y^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{f(y)}{A} = \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(y) = A \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Z definicji prawdopodobieństwa: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = 1$

możemy wyliczyć A. Otrzymamy wówczas:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$$

Zatem:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie: y – odchylenie od wartości prawdziwej,
 $f(y)$ – prawdopodobieństwo odchylenia równego y .

Jeżeli skorzystamy z faktu, że odchylenie (błąd)

$$y = x - \mu$$

gdzie: x – wynik pomiaru, μ – wartość prawdziwa
to otrzymamy:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Rozkład Gaussa