

PRAWDOPODOBIENSTWO

Zdarzenie losowe (lub elementarne) jest pojęciem, którego się nie definiuje. Wszystkie zdarzenia elementarne tworzą zbiór E zdarzeń elementarnych nazywany przestrzenią zdarzeń elementarnych. Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych jest także zdarzeniem losowym A .

AKSJOMATYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA

AKSJOMAT 1:

Każdemu zdarzeniu A wchodzącemu w skład pewnej przestrzeni zdarzeń jest przyporządkowana liczba $P(A)$ z przedziału

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

którą nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia.

AKSJOMAT 2:

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego

$$P(E) = 1$$

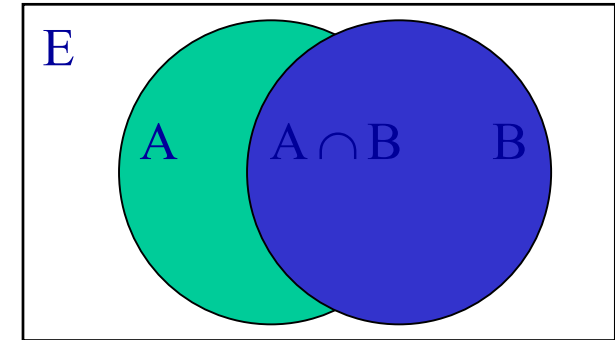
AKSJOMAT 3:

Prawdopodobieństwo sumy skończonej lub przeliczalnej liczby wykluczających się parami zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \dots$ jest równa sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Jeżeli zdarzenia są niezależne tzn. $P(B/A) = P(B)$
to: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Twierdzenie Bayesa:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

ZMIENNA LOSOWA

ZMIENNA LOSOWA – parametr klasyfikujący zdarzenia – każdemu zdarzeniu przypisana jest inna wartość zmiennej.

ZMIENNA LOSOWA to wielkość, która może przyjmować wartości liczbowe z pewnego obszaru zmienności, z określoną częstością (prawdopodobieństwem)

ROZKŁAD PRAWDOPODOBIENSTWA ZMIENNEJ LOSOWEJ

– zależność prawdopodobieństwa od wartości zmiennej losowej.

Zmienna losowa dyskretna: $x_i, P(x_i)$

Zmienna losowa ciągła: $x, P(x_0 < x < x_0 + \Delta x)$

$$P(x_i) = \frac{n(x_i)}{N}, \quad \text{dla } N \rightarrow \infty$$

$n(x_i)$ – liczba zdarzeń, którym przypisana jest zmienna x_i ,

N – liczba wszystkich zdarzeń.

$$P(x_0 < x < x_0 + \Delta x) = \frac{n(x_0 < x < x_0 + \Delta x)}{N}, \quad \text{dla } N \rightarrow \infty$$

GĘSTOŚĆ PRAWDOPODOBIENSTWA

Dla zmiennej losowej ciągłej wygodniej jest zdefiniować wielkość nazywaną GĘSTOŚCIĄ PRAWDOPODOBIENSTWA:

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_0 < x < x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Przy takiej definicji możemy napisać, że:

$$P(x_a < x < x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

DYSTRYBUANTA:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx = P(-\infty < x < x_0)$$

Z definicji prawdopodobieństwa:

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

PARAMETRY ROZKŁADU ZMIENNEJ LOSOWEJ

WARTOŚĆ OCZEKIWANA (ŚREDNIA)

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i)$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Taka definicja jest zgodna ze znanym pojęciem średniej arytmetycznej:

Przyjmijmy że mamy N wartości x_j , przy czym wartości te powtarzają się, tak że dana wartość x_i występuje n_i razy. Możemy wówczas napisać:

$$x_{\text{śr}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} \cdot x_i = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot x_i$$

WARIANCJA I DYSPERSJA

- stanowią miarę rozrzutu wartości zmiennej losowej wokół wartości oczekiwanej.

$$V(x) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x)]^2 \cdot P(x_i)$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 \cdot f(x) dx$$

$$D(x) = \sqrt{V(x)}$$

MOMENTY ROZKŁADÓW ZMIENNEJ LOSOWEJ

MOMENT RZĘDU n :

$$m_n(x) = E(x^n) \\ m_n(x) = \sum_{i=1}^k x_i^n \cdot P(x_i)$$

$$m_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) dx$$

MOMENT CENTRALNY RZĘDU n :

$$M_n(x) = E\{ [x - E(x)]^n \} \\ M_n(x) = \sum_{i=1}^k [x_i - E(x)]^n \cdot P(x_i)$$

$$M_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^n \cdot f(x) dx$$

$$M_1(x) = 0$$

$$M_2(x) = V(x) \quad - \text{opisuje rozrzut } x$$

$$M_3(x) \quad - \text{opisuje asymetrię rozkładu, dla symetrycznego } M_3(x) = 0$$

$$M_4(x) \quad - \text{opisuje spłaszczenie rozkładu}$$

$$\text{skośność} \\ \gamma_1 = \frac{M_3(x)}{[D(x)]^3}$$

$$\text{spłaszczenie} \\ \gamma_2 = \frac{M_4(x)}{[D(x)]^4} - 3$$

WARTOŚĆ MODALNA – wartość zmiennej losowej,
dla której prawdopodobieństwo (gęstość prawdop.) ma największą wartość.

MEDIANA – wartość x_m zmiennej losowej, która dzieli obszar jej zmienności na
dwa obszary o równym prawdopodobieństwie tzn.

$$P(-\infty < x < x_m) = P(x_m < x < +\infty) = 0.5$$