

ODRZUCANIE WYNIKÓW POJEDYNCZYCH POMIARÓW

W praktyce pomiarowej zdarzają się sytuacje gdy jeden z pomiarów odstaje od pozostałych. Jeżeli wykorzystamy fakt, że wyniki pomiarów są zmienną losową opisywaną rozkładem Gaussa i przyjmijmy, że jest to rozkład $N(\mu, \sigma)$, to własności rozkładu mogą być pomocne w sformułowaniu kryterium odrzucania wyników obarczonych błędem grubym.

$$P(\mu - 1\sigma < x < \mu + 1\sigma) = 0.6827$$

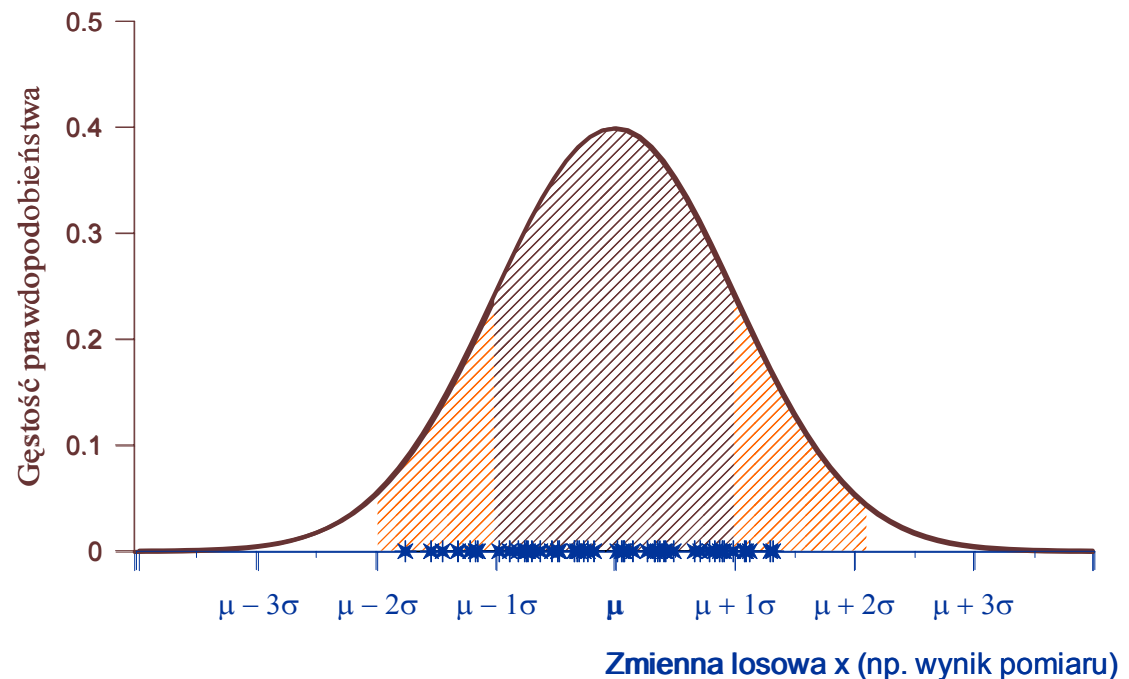
$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Jeżeli jako oszacowanie μ przyjmiemy x_{sr} , a jako oszacowanie σ – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru s to możemy przyjąć, że odrzucamy taki pomiar x , dla którego

$$|x - x_{sr}| \geq 3 \cdot s$$

Gdyż prawdopodobieństwo tego, że taka wartość pojawi się przypadkowo w serii pomiarów o dyspersji s jest bardzo małe (równe 0.0027).



PRZEDZIAŁY UFNOŚCI WARTOŚCI ŚREDNIEJ

W wielu przypadkach informacja o wyniku pomiarów nie jest wystarczająca – potrzebna jest jeszcze wiedza o tym, z jakim prawdopodobieństwem wartość prawdziwa mieści się w określonym przedziale wokół wyniku pomiarów.

Przedział taki nazywamy przedziałem ufności, a prawdopodobieństwo, że wartość prawdziwa mieści się w tym przedziale - poziomem ufności. Określonymu poziomowi ufności γ odpowiada wiele możliwych przedziałów ufności. W przypadku rozkładu Gaussa przedział ufności definiuje się zazwyczaj tak, aby był symetryczny względem wartości oczekiwanej (prawdziwej) μ .

$$\int_a^\mu f(x)dx = \int_\mu^b f(x)dx = \frac{1}{2}\gamma$$

Przyjmijmy, że na podstawie serii n pomiarów $x_1, \dots, x_n$ wyznaczamy wartość średnią x_{SR} , rozkład wyników jest rozkładem normalnym $N(\mu, \sigma)$ a dyspersja rozkładu σ jest znana lub przynajmniej dokładnie oszacowana w oparciu o wyniki pomiarów (tzn. seria liczy co najmniej kilkanaście pomiarów).

Jeżeli zdefiniujemy nową zmienną losową u jako:

$$u = \frac{x_{SR} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

to zmienna ta podlega rozkładowi Gaussa $N(0,1)$.

Z własności rozkładu Gaussa:

$$P(-1 \leq \frac{x_{sr} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq 1) = 0.6827$$

$$P(-2 \leq \frac{x_{sr} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq 2) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq \frac{x_{sr} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq 3) = 0.9973$$

Przekształcając powyższe wyrażenie możemy zapisać:

$$P[(x_{sr} - (\sigma / \sqrt{n})) \leq \mu \leq (x_{sr} + (\sigma / \sqrt{n}))] = 0.6827$$

$$P[(x_{sr} - 2 \cdot (\sigma / \sqrt{n})) \leq \mu \leq (x_{sr} + 2 \cdot (\sigma / \sqrt{n}))] = 0.9545$$

$$P[(x_{sr} - 3 \cdot (\sigma / \sqrt{n})) \leq \mu \leq (x_{sr} + 3 \cdot (\sigma / \sqrt{n}))] = 0.9973$$

Wyrażenia te definiują przedziały ufności o poziomach ufności odpowiednio: 0.6827, 0.9545, 0.9973 .

Należy zwrócić uwagę na to, że chociaż wartość oczekiwana rozkładu (i odpowiadająca jej wartość prawdziwa) nie jest zmienną losową, to mówimy o prawdopodobieństwie tego, iż znajduje się ona w określonym przedziale. W tym przypadku, podobnie jak przy metodzie największej wiarygodności, prawdopodobieństwo nie ma interpretacji częstościowej, lecz jest miarą naszej wiedzy na temat wyznaczanej wielkości.

Rozkład Studenta

W praktyce najczęściej mamy jednak do czynienia z sytuacją, gdy dyspersja pomiarów nie jest znana, a może być jedynie oszacowana na podstawie serii liczącej kilka wyników.

Wówczas jako estymator dyspersji przyjmuje się odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru

$$s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{sr})^2}{n-1}}$$

W takim przypadku możemy w sposób analogiczny do zmiennej u zdefiniować zmienną losową t :

$$t = \frac{x_{SR} - \mu}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{x_{SR} - \mu}{s_{xsr}}$$

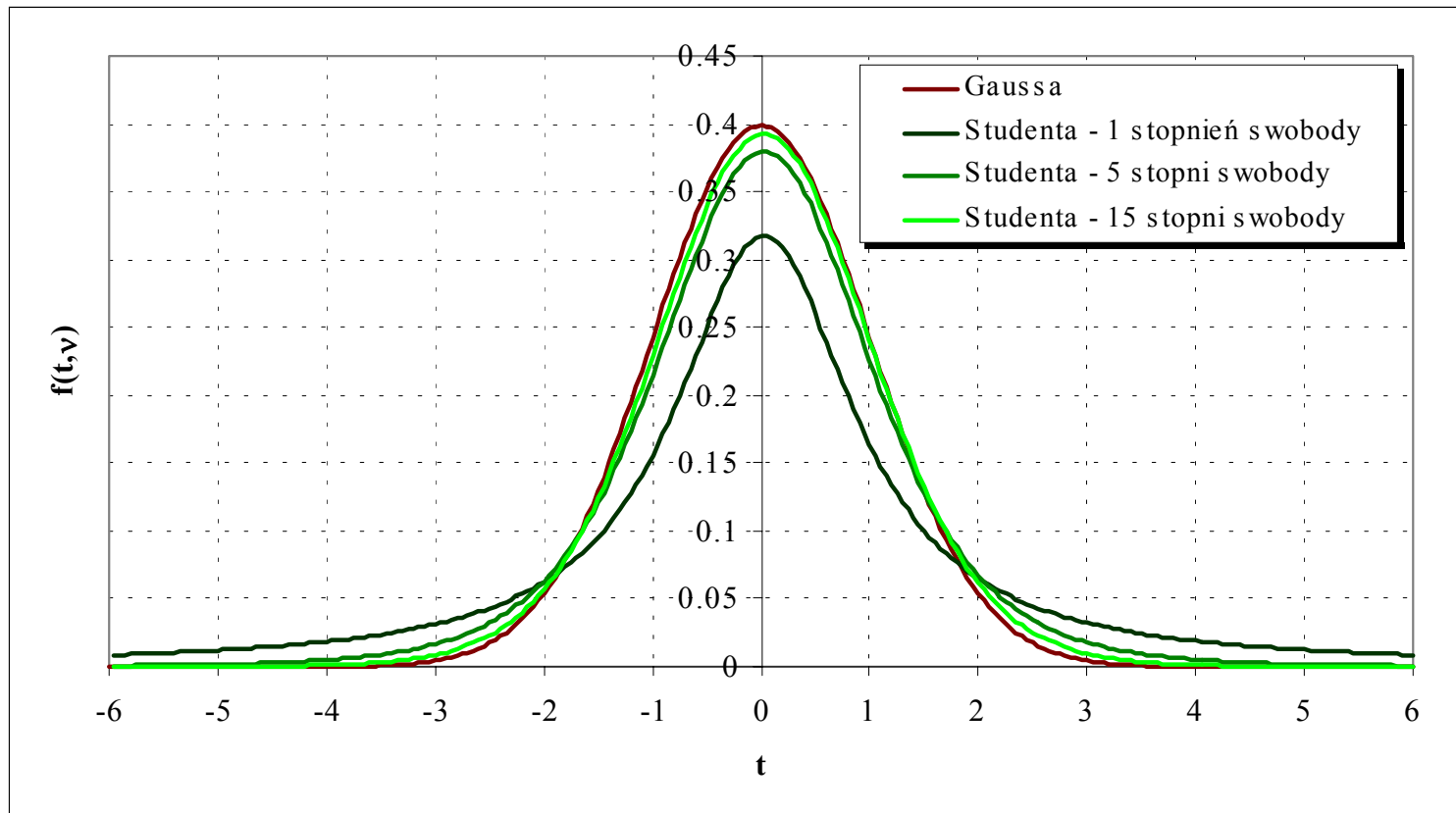
jednakże zmienna ta nie podlega w ogólności rozkładowi Gaussa.

Rozkład prawdopodobieństwa, który opisuje zmienną t nosi nazwę rozkładu Studenta (nie dlatego, że lubią go studenci lecz od pseudonimu angielskiego statystyka W.S. Gosseta, który swoje prace tak właśnie podpisywał). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$f(t, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \sqrt{v\pi}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

Parametr v nosi nazwę ilości stopni swobody, a funkcja gamma Eulera $\Gamma(x)$ jest uogólnieniem silni na zbiór liczb rzeczywistych tzn. $\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)$.

Krzywa przedstawiająca rozkład Studenta jest dla małych wartości stopnia swobody szersza od krzywej Gaussa, jednakże już dla ν = kilkanaście przyjmuje kształt bliski krzywej Gaussa.



Wartość oczekiwana rozkładu $E(t) = 0$, a wariancja istnieje tylko dla $\nu > 2$ i wynosi

$$V(t) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

Trzeba podkreślić, iż z powyższego faktu wynika, że dla rozkładu Studenta o małych wartościach ν odchylenie standardowe nie jest dobrym estymatorem dyspersji.

W rozważanym przypadku zmiennej t wyznaczonej w oparciu o wartość średnią i odchylenie standardowe wyznaczone na podstawie serii n pomiarów liczba stopni swobody określona jest właśnie przez liczbę pomiarów i wynosi

$$v = n - 1$$

Interesować nas będą przedziały ufności o poziomach ufności γ przyjmujących te same wartości jak w przedstawionym wcześniej przypadku dla zmiennej u tzn. 0.6827, 0.9545 oraz 0.9973. Przedziały te wyznaczamy z gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Studenta.

$$P(-b \leq t \leq b) = \int_{-b}^b f(t, n-1) dt = \gamma$$

Po odpowiednich wyliczeniach otrzymuje się następujące wartości przedziałów ufności:

$$P\left[\left(x_{sr} - k_1 \cdot s_{xsr}\right) \leq \mu \leq \left(x_{sr} + k_1 \cdot s_{xsr}\right)\right] = 0.6827$$

$$P\left[\left(x_{sr} - k_2 \cdot s_{xsr}\right) \leq \mu \leq \left(x_{sr} + k_2 \cdot s_{xsr}\right)\right] = 0.9545$$

$$P\left[\left(x_{sr} - k_3 \cdot s_{xsr}\right) \leq \mu \leq \left(x_{sr} + k_3 \cdot s_{xsr}\right)\right] = 0.9973$$

Wartości k_1, k_2, k_3 zależą od ilości stopni swobody, czyli liczby pomiarów.

Przykładowe wartości zawarte są w tabeli.

n	k_1	k_2	k_3
3	1.242	3.381	9.778
4	1.186	2.922	6.993
5	1.142	2.688	5.737
10	1.076	2.307	4.047
15	1.056	2.200	3.654
20	1.045	2.151	3.481
50	1.029	2.067	3.203

TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH

Hipotezą statystyczną nazywamy taką hipotezę dotyczącą badanej populacji, która nadaje się do sprawdzenia metodami statystycznymi na podstawie wyników badań próby.

W tym sensie hipotezy dotyczące mierzonych wielkości i weryfikowane na podstawie wyników pomiarów mają charakter hipotez statystycznych.

Hipotezami statystycznymi są m.in.. następujące stwierdzenia:

- średnie miesięczne wynagrodzenie w gospodarce narodowej w Polsce wynosi 2200 zł,
- wartość przyspieszenia ziemskiego wynosi $g=9.81 \text{ m/s}^2$,
- wyniki dwóch niezależnych pomiaru oporu elektrycznego wynoszące $R=352 \Omega$ z niepewnością $u(R)=18 \Omega$ oraz $R=385 \Omega$ z niepewnością $u(R)=15 \Omega$ są zgodne ze sobą,
- ilość rozpadów promieniotwórczych zachodzących w jednostce czasu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona.

Hipotezy statystyczne dzielimy na:

Hipotezy parametryczne - dotyczące parametrów rozkładów prawdopodobieństwa.

Hipotezy nieparametryczne - które nie dotyczą parametrów rozkładów prawdopodobieństwa (a np. rodzaju rozkładu jakiemu podlega dana zmienna losowa).

Weryfikacji hipotez statystycznych dokonuje się za pomocą testów statystycznych.

Testowanie polega na wyznaczeniu wartości funkcji testowej, która jest zmienną losową wyznaczoną na podstawie próby.

Procedura testowania hipotezy statystycznej

przebiega następująco:

1. W zależności od rodzaju problemu, którego dotyczy hipoteza przyjmujemy odpowiednią funkcję testową.
2. Wyznaczamy wartość funkcji testowej na podstawie danych z próby (wyników pomiarów).
3. Przyjmujemy wartość poziomu istotności α . Wartość ta pozwala określić granice tzw. obszaru krytycznego. Wartość poziomu istotności jest równa prawdopodobieństwu tego, że w wyniku testu odrzucimy hipotezę mimo, iż jest ona prawdziwa. Dlatego też w praktyce przyjmuje się wartości α znacznie mniejsze od 0.1 .
4. Jeżeli wyznaczona wartość funkcji testowej jest zawarta w obszarze krytycznym **hipotezę możemy odrzucić**.
5. Jeżeli wyznaczona wartość funkcji testowej mieści się poza obszarem krytycznym, wówczas **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy**. Należy jednak podkreślić, że wynik ten nie jest dowodem słuszności hipotezy - nie możemy zatem powiedzieć, że uzyskany wynik potwierdza hipotezę.

TESTOWANIE ZGODNOŚCI WARTOŚCI ŚREDNIEJ Z ZADANĄ WARTOŚCIĄ I ZGODNOSCI WARTOŚCI ŚREDNICH

Hipoteza jaką w tym przypadku formułujemy jest następująca: wynik pomiaru x_{sr} jest zgodny zadaną wartością x_z . Jest ona równoznaczna z pytaniem czy wartość x_z jest równa prawdziwej wartości wielkości mierzonej (wartości oczekiwanej μ).

Sytuacjami, w których przeprowadzamy tego typu test jest stwierdzenie zgodności wyniku pomiarów z wartością tablicową (a więc o wiele dokładniejszą) lub z wartością z góry założoną. Z pierwszą przypadkiem mamy często do czynienia na pracowni studenckiej, z drugim podczas sprawdzania czy dany egzemplarz wyrobu jest zgodny z założeniami (np. wyprodukowany opornik ma opór założony jako nominalny).

Najwygodniejszą funkcją testową jest wyrażenie:

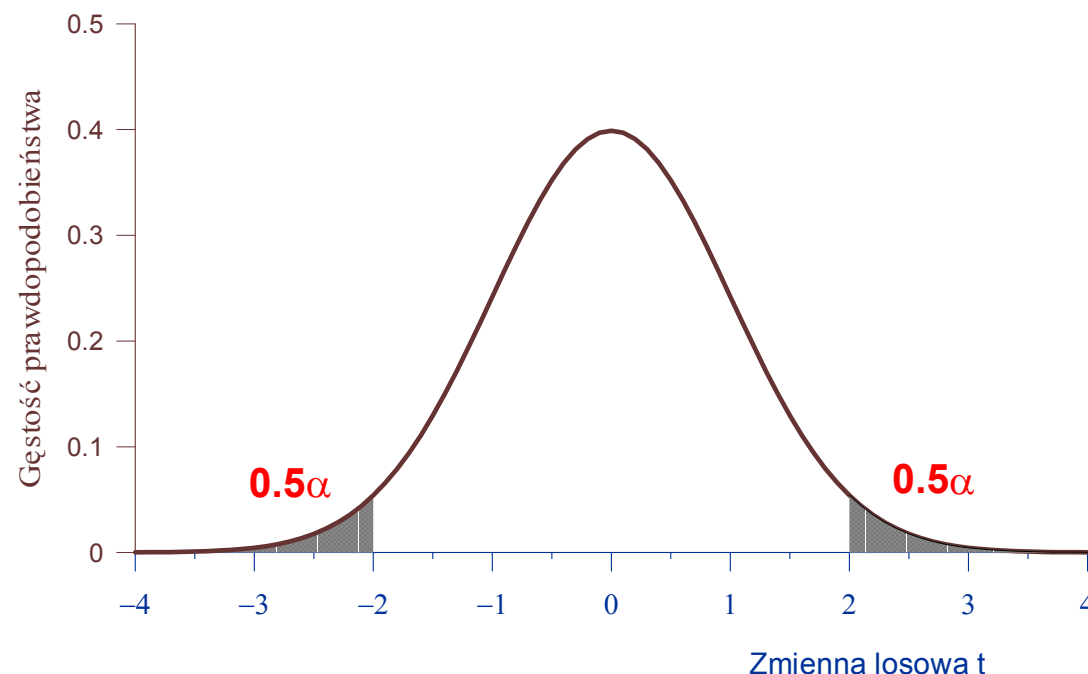
$$t = \frac{x_{sr} - x_z}{u(x_{sr})}$$

Jeżeli $x_z = \mu$ to zmienna t jest zmienną losową o rozkładzie:

- Gaussa $N(0,1)$ jeśli x_{sr} wyznaczone zostało na podstawie co najmniej kilkudziesięciu pomiarów (czyli $u(x_{sr})$ jest dość dokładnym oszacowaniem dyspersji),
- Studenta o $E(t)=0$ i $n-1$ stopniach swobody (n - liczba pojedynczych pomiarów wykorzystanych do wyznaczenia średniej) jeśli x_{sr} wyznaczono na podstawie kilku – kilkunastu pomiarów.

Oznacza to, iż prawdopodobieństwo, że t będzie znacznie różniło się od zera jest niewielkie. Jeśli więc t jest znacznie większe lub mniejsze od 0, to oznacza iż x_z nie jest zgodne z wartością średnią z pomiarów.

W celu przeprowadzenia testu określamy dwustronny obszar krytyczny o poziomie istotności α . Za wartość α przyjmuje się przeważnie 0.05 lub 0.003, co odpowiada w przybliżeniu odległości pomiędzy x_{sr} a x_z równej co najmniej $2 \cdot u(x_{sr})$ lub $3 \cdot u(x_{sr})$ dla rozkładu Gaussa albo co najmniej $k_2 \cdot u(x_{sr})$ lub $k_3 \cdot u(x_{sr})$ dla rozkładu Studenta.



Zatem jeżeli $|x_{sr} - x_z| > k \cdot u(x_{sr})$ gdzie $k = 2$ lub k_2 albo $k = 3$ lub k_3 to na poziomie istotności odpowiednio 0.05 lub 0.003 hipotezę o zgodności wartości średniej zadaną możemy odrzucić.

W analogiczny sposób przeprowadza się testowanie zgodności dwóch wartości średnich x_{1sr} i x_{2sr} określonych z niepewnościami $u(x_{1sr})$ i $u(x_{2sr})$ (zgodności dwóch wyników niezależnie przeprowadzonych pomiarów) z tym, że jako funkcję testową przyjmuje się wówczas

$$t = \frac{x_{sr1} - x_{sr2}}{\sqrt{u(x_{sr1})^2 + u(x_{sr2})^2}}$$