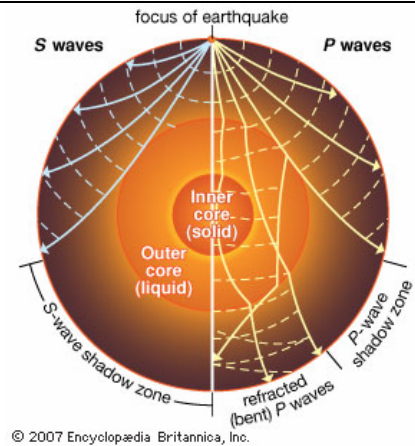


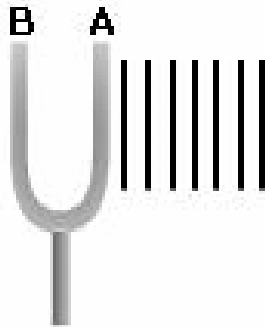
RUCH FALOWY



Fale sejsmiczne



Fale morskie



Kamerton



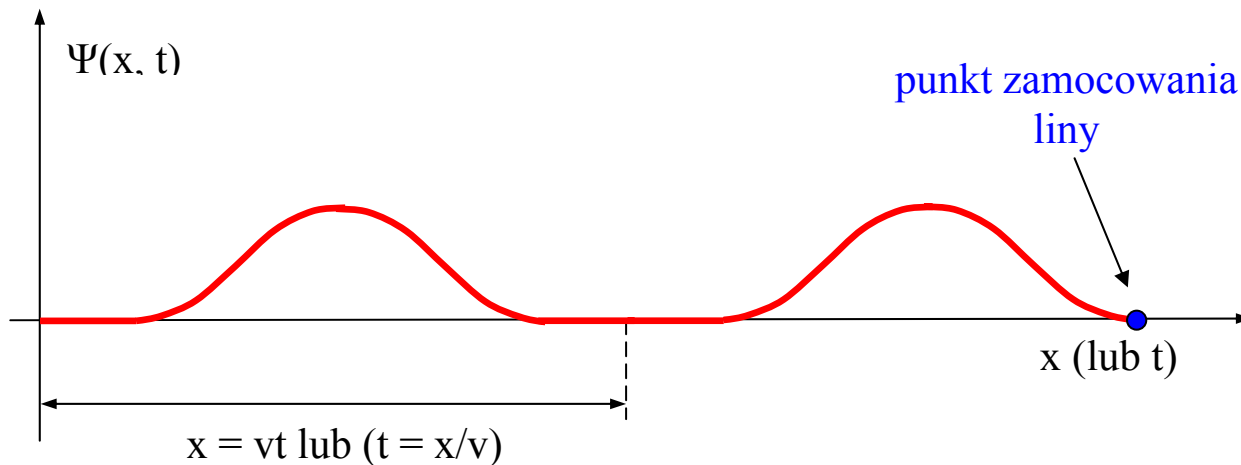
Interferencja

RÓWNANIE FALI

Fala = rozchodzenie się „zaburzeń” w ośrodku materialnym lub próżni:

- fale podłużne i poprzeczne w ciałach stałych,
- fale podłużne w gazach,
- fale elektromagnetyczne w próżni,

„zaburzenie”, np. drgania układu cząstek (np. fala w gumowej lince)



fala w naciągniętej linie wywołana szarpnięciem w chwili $t = 0$

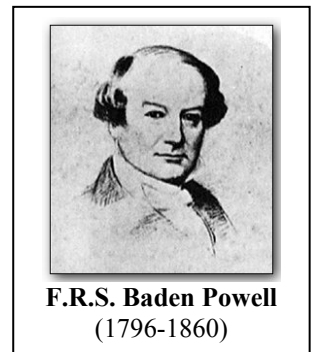
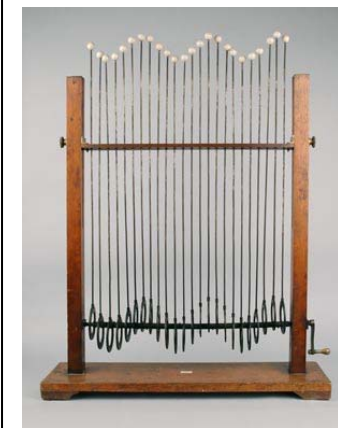
zaburzenie w funkcji położenia w określonej chwili czasu (lub zaburzenie w funkcji czasu w określonym punkcie przestrzeni):

$$\Psi(x, t) = f(x - vt)$$

zmienna x , przestrzenny rozkład zaburzeń

$$\Psi(x, t) = g\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

zmienna t , rozkład zaburzeń w czasie



Maszyna Powell'a do demonstracji ruchu falowego skonstruowana przez Elliott Bros w XIX w.

FALE HARMONICZNE

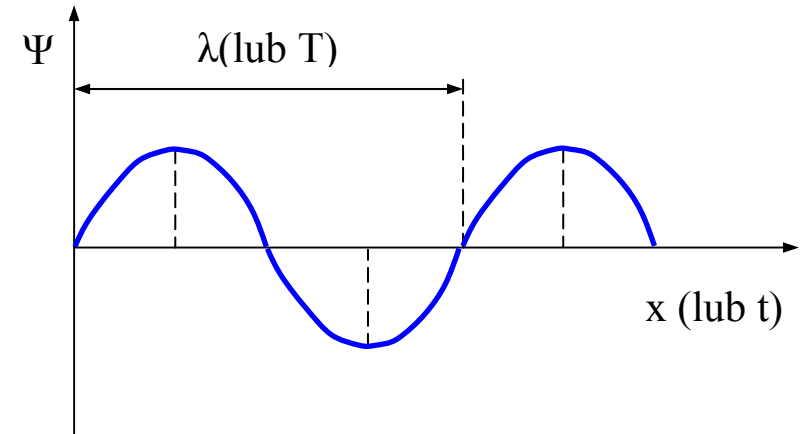
Równanie fali harmoniczej

fala płaska ma równanie $\Psi = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = A \sin (kx - \omega t)$

składowa wektora falowego $\vec{k}$ w kierunku x $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{\nu}{\lambda}$$

$$\omega = \nu k$$



RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE RUCHU FALOWEGO

Funkcja $\Psi = f(x - vt)$ spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{równanie różniczkowe drugiego rzędu}$$

ta sama (matematycznie) postać równania dla wszystkich rodzajów fal:

- fal sprężystych
- fal elektromagnetycznych
- fal materii

FAŁA SPRĘŻYSTA W PRĘCIE

Równanie różniczkowe fali sprężystej: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$

gdzie:

ρ – gęstość, E – moduł Younga

$$\frac{1}{v_k^2} = \frac{\rho}{E}$$

prędkość fali podłużnej: $v_{||} = \sqrt{\frac{\rho}{E}}$

prędkość fali poprzecznej: $v_{\perp} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$

(k – moduł sztywności na skręcenie)

Przybliżone wartości modułu Younga
dla różnych materiałów

Material	Moduł Younga, GPa
Guma	0,01-0,10
Poli(tereftalan etylenu) (PET), np.: butelki plastikowe	2,0-2,5
Drewno dębowe	11
Stop aluminium	69
Szkło	72
Żelazo i stal	190-210
Diamant	1 050-1 200

FAŁA PODŁUŻNA W GAZIE

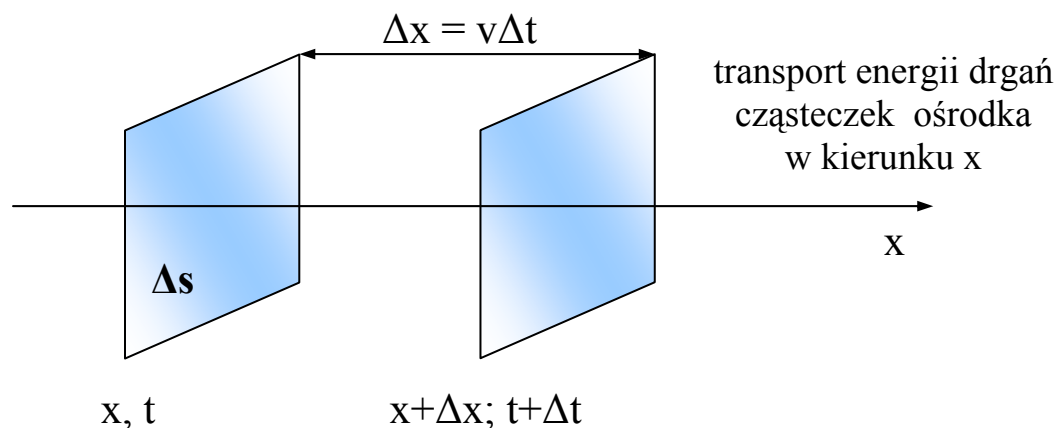
$$v = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}}, \quad \chi = C_p / C_v$$

Dlaczego Indianie
przykładali uszy
do szyn kolejowych?



Ośrodek	Prędkość fal podłużnych
powietrze	~ 340 m/s
woda	~ 1500 m/s
żelazo	~ 5100 m/s ($v_{ } > v_{\perp}$) ~ 3000 m/s ($\approx v_{\perp}$)
cynk	3810 m/s
mosiądz	3710 m/s
cyna	2730 m/s
ołów	1200 m/s

TRANSPORT ENERGII W RUCHU FALOWYM



Δs – element powierzchni czoła fali

np. gęstość strumienia energii fali harmoniczej

$$E_\rho = (\sum E_i) / \Delta V = \left(\sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 A^2 \right) / \Delta V = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \frac{\sum m_i}{\Delta V} \quad \frac{\sum m_i}{\Delta V} = \rho$$

suma energii drgań wszystkich oscylatorów harmoniczych

zawartych w jednostce objętości : $E_\rho = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$

$$I = E_\rho \cdot v = \left(\frac{1}{2} \rho v \right) \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2$$

$Z = \rho \cdot v$ oporność falowa ośrodka

Natężenie fali, gęstość energii

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta s \Delta t} \quad \Delta E = E_\rho \cdot \Delta V$$

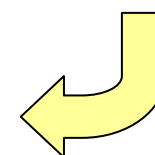
E_ρ – energia przypadająca na jednostkę objętości ośrodka $\Delta V = \Delta s \Delta x = \Delta s v \Delta t$

$$I = \frac{\Delta s \cdot v \cdot \Delta t \cdot E_\rho}{\Delta s \cdot \Delta t} = v \cdot E_\rho$$

I – natężenie fali

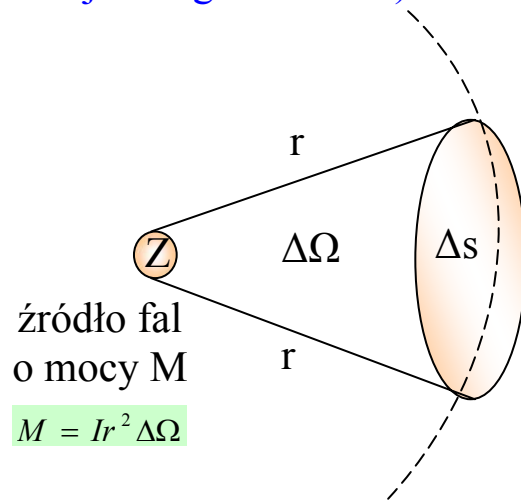
E_ρ – gęstość strumienia energii

$$I = v \cdot E_\rho \quad [I] = W/m^2$$



Moc źródła fali

(szybkość emisji energii w czasie)



$$M = I r^2 \Delta\Omega$$

moc źródła: $M = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

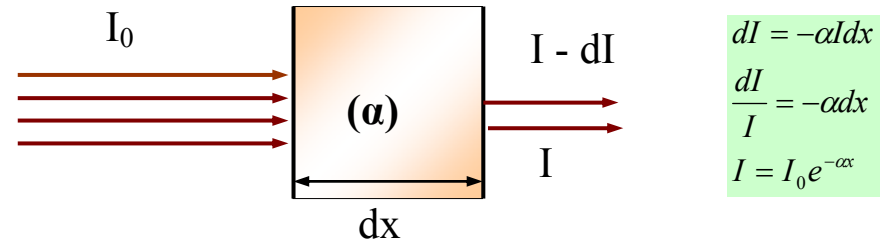
$$\Delta s = r^2 \Delta\Omega$$

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta s \cdot \Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r^2 \Delta\Omega} = \frac{M}{r^2 \Delta\Omega}$$

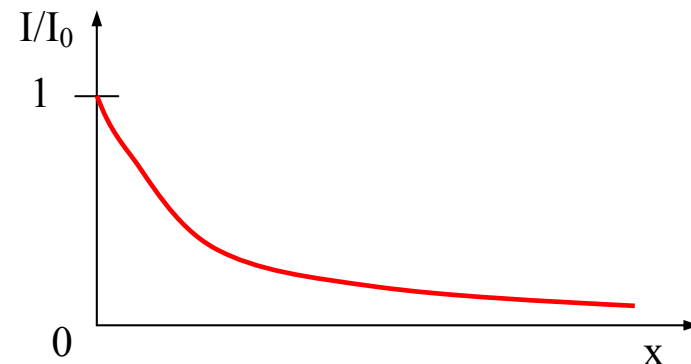
dla źródła kulistego lub punktowego: $I = \frac{M}{4\pi r^2}$

Absorpcja energii fal

zmiana natężenia fali – w ośrodku następuje pochłanianie energii fali i zamiana energii na ciepło



współczynnik pochłaniania dla fal sprężystych w ośrodku ciągłym: $\alpha \sim \omega^2 / \rho$



SUPERPOZYCJA FAL

Zasada superpozycji

Jeżeli w ośrodku rozchodzą się dwie lub więcej różnych fal, to wypadkowe drganie cząstek ośrodka, a zatem i wypadkowa fala jest sumą geometryczną fal składowych.

np. dwie fale harmoniczne o nieznacznie różniących się długościach

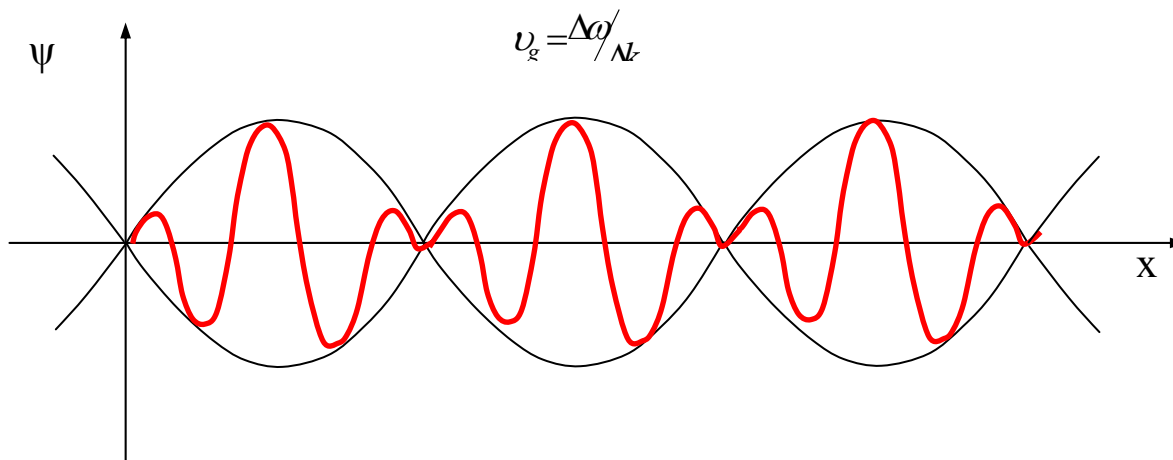
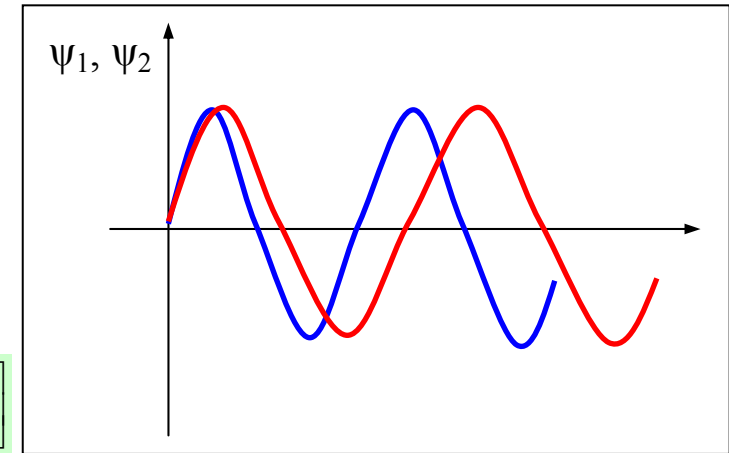
$$\psi_1 = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\psi_2 = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] \quad (k = 2\pi/\lambda) \quad \Delta\lambda \ll \lambda, \Delta\omega \ll \omega$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)\right] \sin(kx - \omega t)$$

Fala wypadkowa ma zmienną w czasie amplitudę $\psi = 2A \cos\left[\frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta \omega}{\Delta k}t\right)\right]$

- prędkość fazowa $v = \frac{\omega}{k}$ - prędkość grupowa $v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$



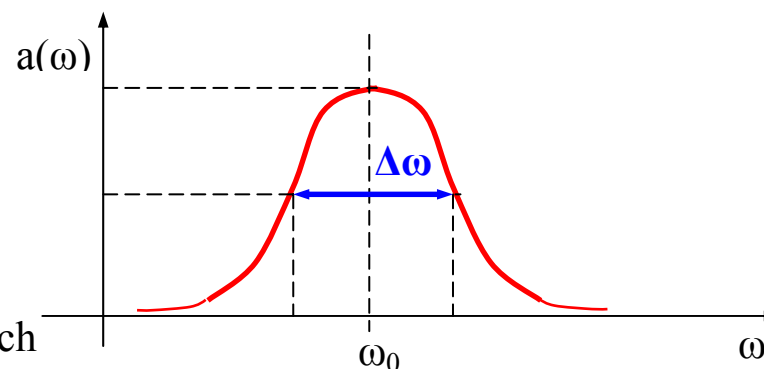
ψ – fala o tej samej długości i częstotliwości co fale składowe, lecz zmiennej amplitudzie; obwiednia amplitudy ma sama charakter fali poruszającej się z prędkością $v_g = \Delta \omega / \Delta k$, tego typu zmiana amplitudy nosi nazwę **dudnienia**.

FALE RZECZYWISTE ↔ PACZKI FALOWE

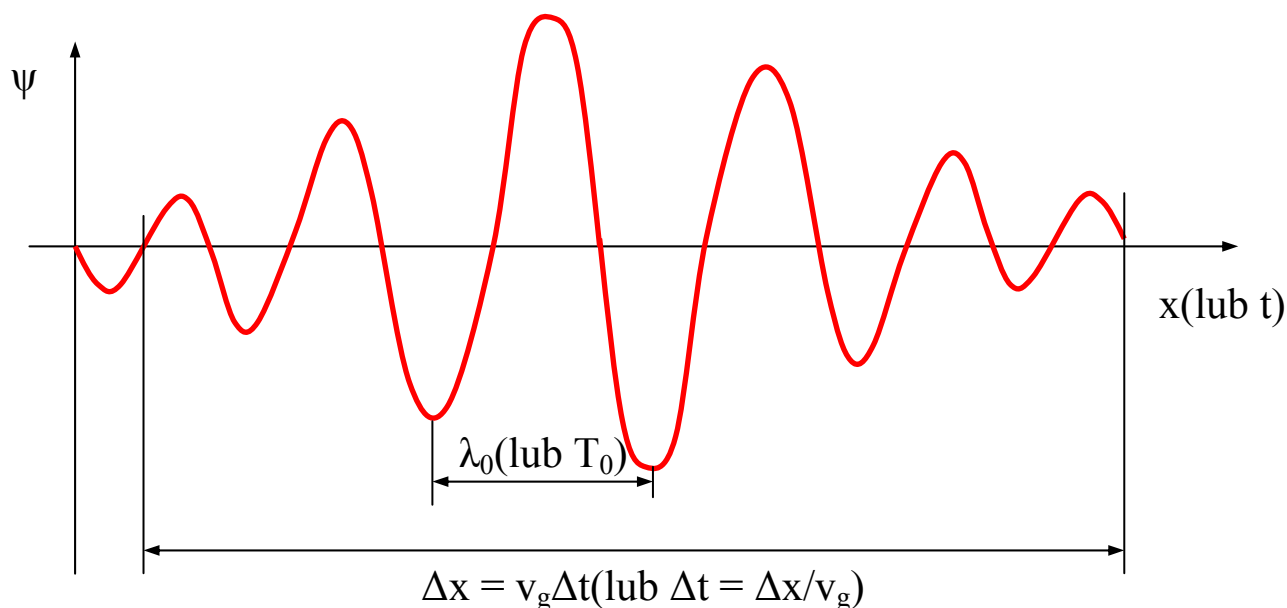
Fale rzeczywiste – fale skończone w czasie i przestrzeni, nie są falami harmonicznymi i stanowią paczki falowe.

Własności:

- rozciągłość w przestrzeni (Δx) i w czasie (Δt)
- porusza się z prędkością grupową v_g
- jest superpozycja fal harmonicznymi o różnych częstościach



Gęstość widmowa amplitud $a(\omega)$ paczki falowej



Zasady nieoznaczoności:

$$\begin{bmatrix} \Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi \\ \Delta \omega \cdot \Delta t \geq 2\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \\ \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \end{bmatrix}$$

$$E = \hbar \omega$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\hbar = h/2\pi$$

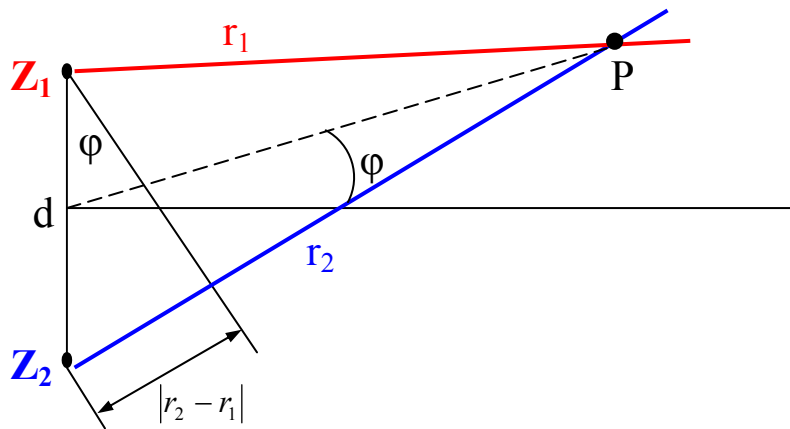
h – stała Plancka

INTERFERENCJA FAL

Dla uproszczenia: dwa punktowe źródła fal Z_1 i Z_2 o tej samej częstotliwości i tej samej amplitudzie

$$\psi(P) = A \sin(\omega - kr_1 + \alpha_1) + A \sin(\omega - kr_2 + \alpha_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 - \text{początkowe fazy (drgań) źródeł}$$

$$\psi(P) = 2A \cos\left(k \frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \sin\left(\omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$



jeżeli $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const}(=0)$ – **źródła spójne:**

- częstotać fali wypadkowej w dowolnym punkcie = częstotać fali składowych
- amplituda $\psi(P) = 2A \cos\left(k \frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)$ jest stała w czasie, lecz zależy od P (od $r_2 - r_1$)
- amplituda zmienia się od $2A$ do 0

źródła spójne $\Leftrightarrow$ interferencja fal

Kierunki wzmacniania i wygaszania się fal

zał.: $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const} = 0$

$|r_2 - r_1| = n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$ maksymalna amplituda fali wypadkowej – **wzmocnienie fali**

$|r_2 - r_1| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ **wygaszanie się fali**

Jeżeli ($r_2 \gg d$, $r_1 \gg d$) we wszystkich punktach kierunku określonego przez kąt φ jednakowy wynik interferencji, w szczególności:

$|r_2 - r_1| = d \sin \varphi_n = n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$ **wzmocnienie fal**

$|r_2 - r_1| = d \sin \varphi_{wn} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ **wygaszenie się fal**

Zależność natężenia fali od kierunku rozchodzenia się fali (charakterystyka kierunkowa źródeł)

- amplituda (B) fali powstałej na skutek interferencji w punkcie P ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

$$B(\varphi) = 2A \cos\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right] = 2A \cos\left(\frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}\right)$$

- natężenie fali

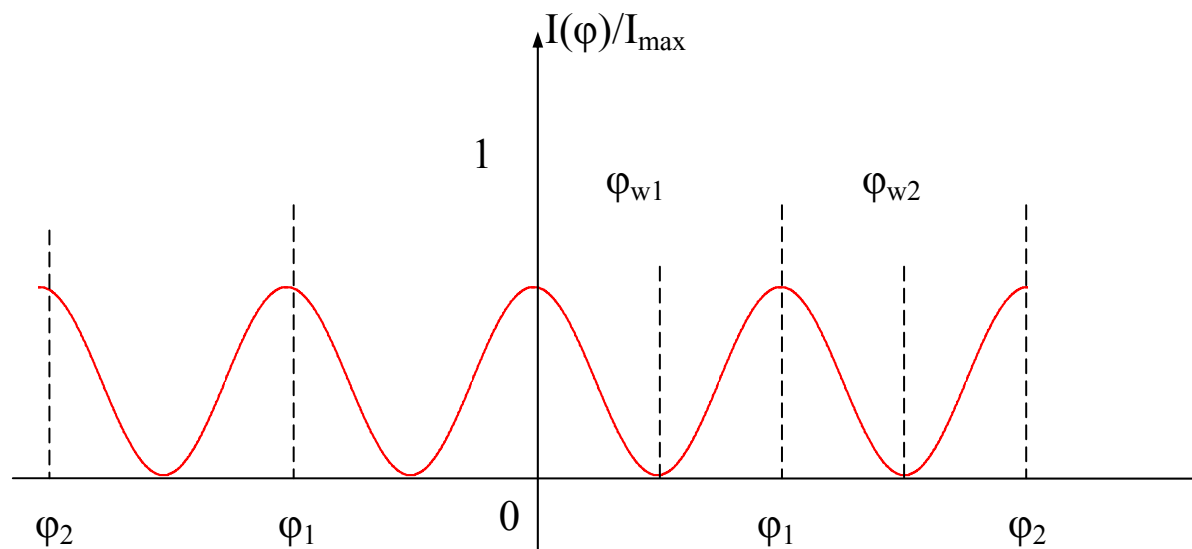
$$I \sim B^2(\varphi), \quad B_{\max} = 2A$$

fale spójne (koherentne)

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const};$$

$$\text{np. } \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$



FAŁA STOJĄCA

(np. fala powstała w rurce gumowej, rurze Quincke'go)

Równanie fali: $\psi = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t$

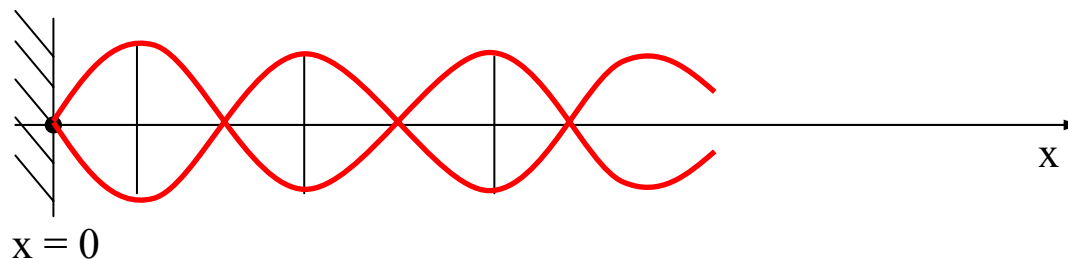
$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

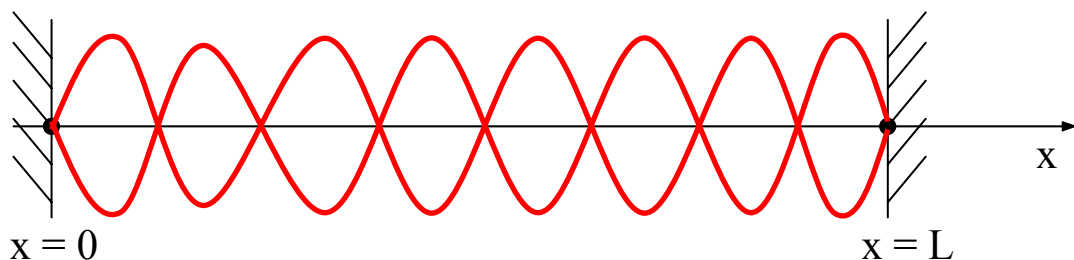
$$B_{\max} = 2A$$

węzły fali stojącej: $x = n \frac{\lambda}{2}$

strzałki fali stojącej: $x = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$



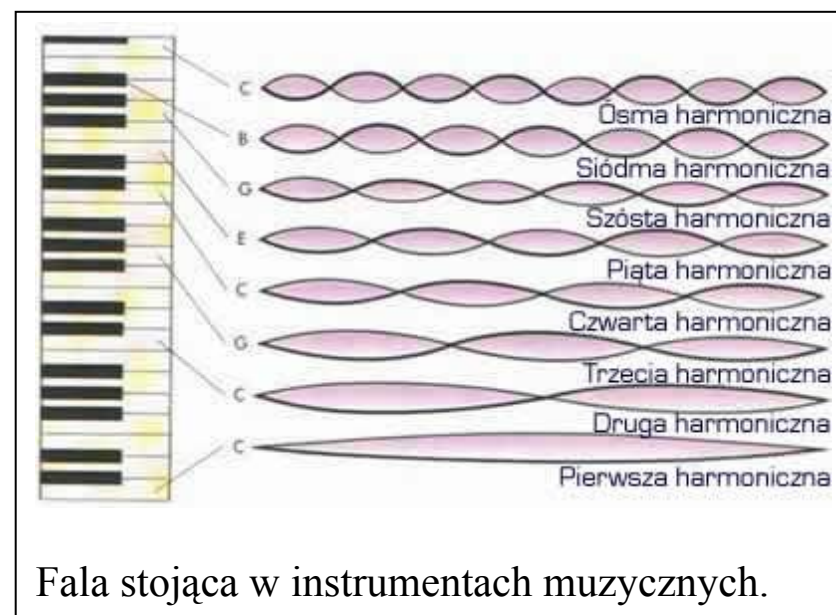
Rurka zamocowana z jednego końca ($x = 0$)



Rurka zamocowana z dwóch końców (np. struna)

$x = L$ węzeł ($B = 0$)

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0, \quad \frac{2\pi L}{\lambda} = m\pi, \quad L = m \frac{\lambda}{2} \quad m - \text{liczba całkowita}$$



Fala stojąca w instrumentach muzycznych.