

RUCH DRGAJĄCY

Przykłady ruchu drgającego



ruch huśtawki



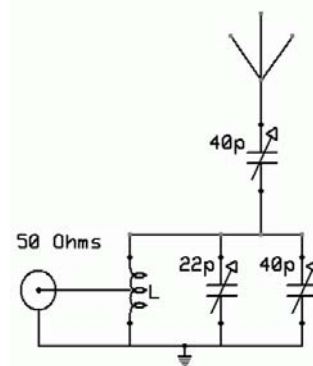
drgania strun w instrumentach muzycznych



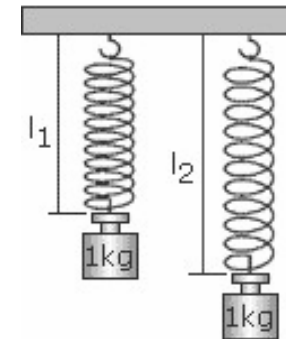
ruch wahadła zegara mechanicznego



drgania szyb okiennych przy hałaśliwej ulicy

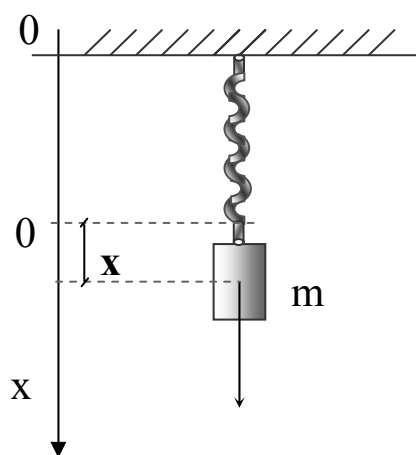


Układ wejściowy anteny radiowej AM



ruch ciężarka wiszącego na sprężynie

OSCYLATOR HARMONICZNY



Oscylator harmoniczny prosty

- Częstość drgań nie zależy od amplitudy.
- Zmiany stanu oscylatora podlegają zasadzie superpozycji.

- Siła wprowadzająca ciało w ruch drgający (siła quasi-sprężysta) i równanie ruchu

$$\begin{aligned} F &= -kx(t) \\ F &= ma \end{aligned} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

k – współczynnik sprężystości;
m – masa oscylatora;
a – przyspieszenie

- Równanie ruchu oscylatora harmonicznego prostego jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu. „Odgadnięte” rozwiązanie równania posiada postać: $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Oznaczenia:

A – amplituda drgań, ω_0 – częstość kołowa drgań własnych oscylatora, φ - faza początkowa drgań, t – dowolnie wybrana chwila czasu, T – okres drgań

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

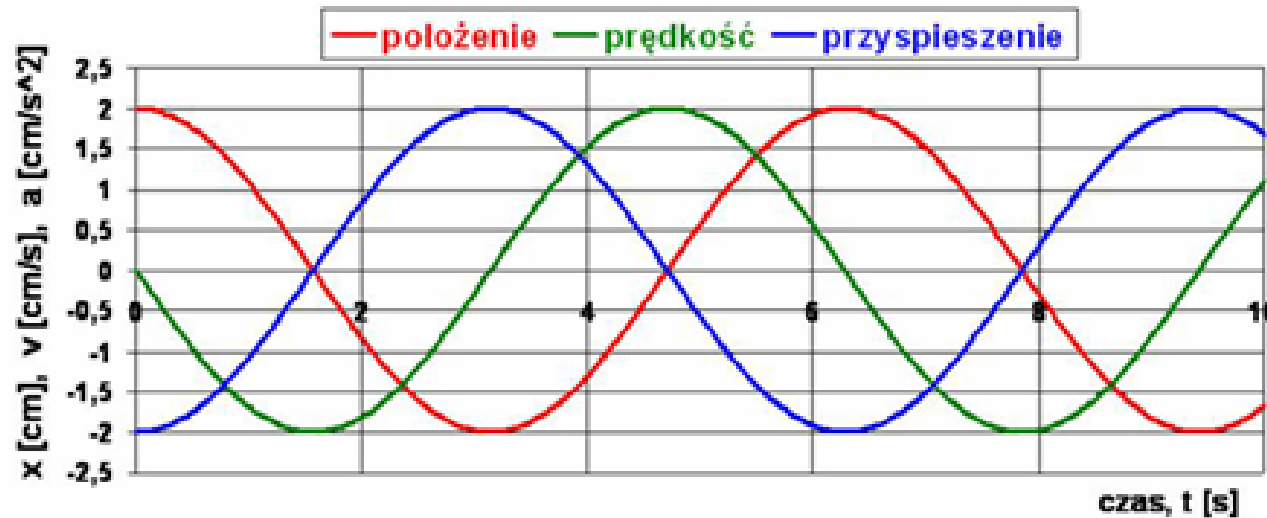
Rozwiązaniem równania może być również funkcja cosinus oraz kombinacja liniowa obydwu tych funkcji.

- Prędkość oscylatora $\frac{dx}{dt} = v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- Przyspieszenie oscylatora $\frac{d^2x}{dt^2} = a = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
- Z równania ruchu, do którego podstawiamy wzory na x i przyspieszenie można wyznaczyć związek pomiędzy częstością kołową drgań własnych oscylatora a jego własnościami fizycznymi (masa, współczynnik sprężystości)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_0$$

$$\nu_0 = \frac{1}{T}$$

ν_0 – zwykła częstość drgań (liczba powtórzeń tego samego położenia ciała w jednostce czasu).



Zależność położenia, prędkości i przyspieszenia w ruchu harmonicznym od czasu. W momentach, gdy wychylenie z położenia równowagi jest maksymalne ($x = A$), prędkość jest równa zero, natomiast przyspieszenie ma wartość maksymalną, a znak przeciwny do wychylenia.

ŚREDNIA ENERGIA KINETYCZNA I POTENCJALNA OSCYLATORA HARMONICZNEGO PROSTEGO

- Definicja wartości średniej wielkości okresowo zmiennej $q(t)$: $\langle q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt$, $q(t)$ – wartość chwilowa

	Energia kinetyczna	Energia potencjalna (praca siły sprężystości)
Chwilowa wartość	$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega_0 A \cos \omega_0 t)^2$, $\varphi = 0$	$E_p = L = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$
Średnia wartość	$\langle E_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_k(t) dt$ Podstawiając $z = \omega_0 t$ wykonujemy całkowanie $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 z dz = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2$	$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_p(t) dt = \frac{1}{4}kx^2 = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2$
Średnia wartość energii kinetycznej oscylatora harmonicznego prostego jest równa średniej wartości jego energii potencjalnej $\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle$		
Energia całkowita oscylatora i prawo zachowania energii $E = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = const$		

OSCYLATOR HARMONICZNY TŁUMIONY (DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE)

- Oprócz siły quasi-sprężystej **na oscylator harmoniczny działa siła tarcia** proporcjonalna w każdej chwili do prędkości ciała i przeciwnie do niej skierowana

$$\vec{T} \sim \vec{v}(t)$$

$$T = -fv = -f \frac{dx}{dt}$$

- Równanie ruchu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - f \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu – jak rozwiązać?

Pierwszy etap rozwiązania

Na cząstkę działa tylko siła tarcia. Postać równania ruchu: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} = 0$

Czas relaksacji: $\tau = \frac{m}{f}$

Współczynnik tłumienia: $\beta = \frac{1}{\tau}$

Inny sposób zapisu równania ruchu:

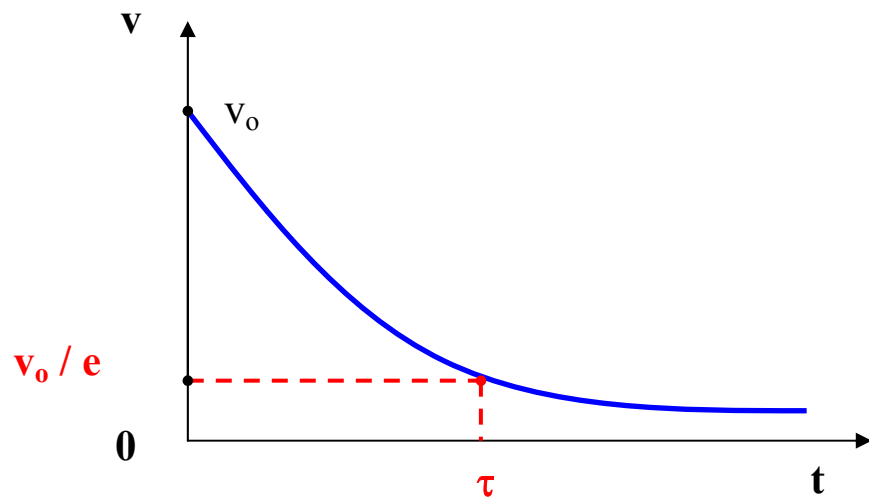
$$\frac{dx}{dt} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

Całkujemy równanie obustronnie dla **warunków początkowych**: $v=v_0$ dla $t=0$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln v - \ln v_0 = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

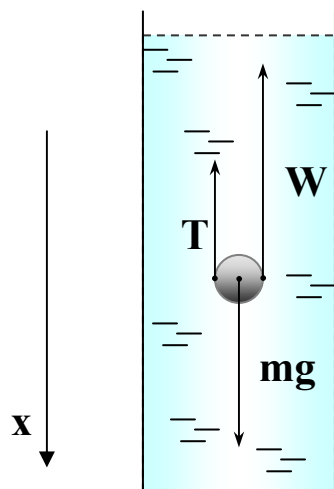
Prędkość tłumiona jest ze stałą czasową τ .

($e = 2.7$ podstawa logarytmów naturalnych)



Zmiana prędkości ciała, na które działa siła tarcia, w funkcji czasu.

SPADANIE CIAŁA W CIECZY LEPKIEJ



Na ciało działa siła ciężkości (mg), siła wyporu (W) i siła tarcia ($T=-fv$)

$$F = mg - W = \text{const}$$

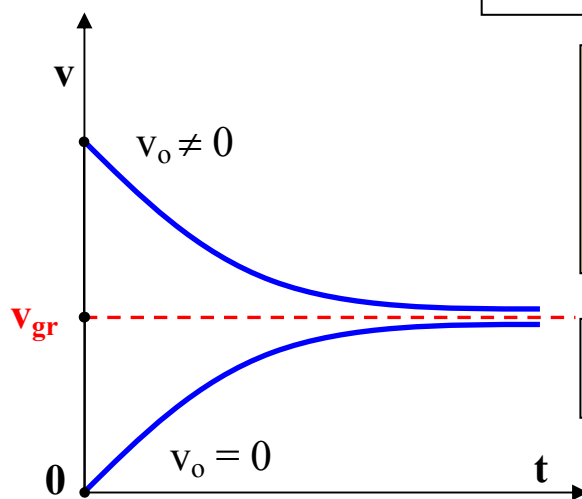
Równanie ruchu ciała: $\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m} \left(v - \frac{F}{m} \right)$

Rozwiązanie równania ruchu dla warunków początkowych: $t=0, v=v_0$

$$v = \frac{F}{f} + \left(v_0 - \frac{F}{f} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\tau = \frac{m}{f}$$

$$t \rightarrow \infty \\ v \rightarrow v_{gr} = \frac{F}{f}$$



Ciało osiąga tę samą wartość prędkości granicznej przy dwóch różnych wartościach prędkości początkowej. Po osiągnięciu prędkości granicznej, ciało porusza się praktycznie ruchem jednostajnym z prędkością v_{gr} .

Energia kinetyczna ciała tłumiona jest ze stałą czasową τ .

$$v = v_0 e^{(-\frac{t}{\tau})}$$



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = E_{k0} e^{(-\frac{2t}{\tau})}$$



$$E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Inaczej – z działaniem na ciało siły tarcia związane jest rozpraszanie energii ciała.

Drugi etap rozwiązania

Na oscylator harmoniczny działa siła tarcia. Równanie ruchu ma postać: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

Częstotliwość drgań własnych: $\omega_0^2 = k / m$

Stała czasowa: $2\tau = \frac{m}{f} = \frac{1}{\beta}$

Rozwiązanie równania ruchu („odgadnięte”): $x = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega_1 t$

Obliczamy $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ podstawiamy do równania ruchu i wyznaczamy ω_1

$\omega_0^2 > \beta^2$ **ruch periodyczny** oscylatora tłumionego

$\omega_0^2 = \beta^2$ **ruch krytyczny** (oscylator nie wykonuje drgań)

$\omega_0^2 < \beta^2$ **ruch aperiodyczny** (nieokresowy)

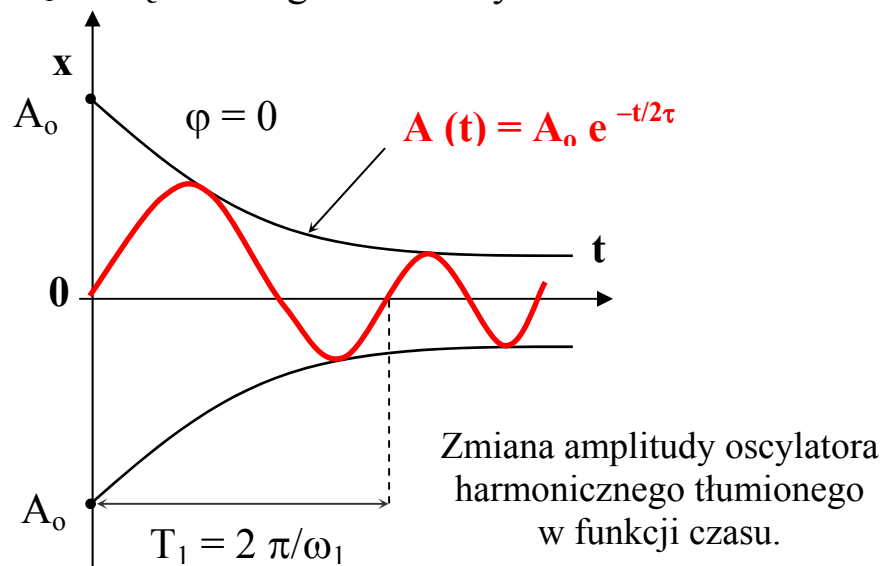
OSCYLATOR PERIODYCZNY TŁUMIONY

Rozwiązanie równania ruchu:

$$x = A_0 e^{(-\frac{t}{2\tau})} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

ω_1 – częstość drgań tłumionych



ENERGIA UKŁADU DRGAJĄCEGO TŁUMIONEGO

Energia całkowita

$$E = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2$$

Straty energii

Szybkość strat energii jest równa stracie mocy

układu $P(t)$:
$$P(t) = -\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{E}{\tau}$$

Współczynnik dobroci (dobroć układu)

$$Q = 2\pi \frac{E}{PT_1} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{E}{P/\omega_1} = \frac{E}{P} \omega_1 = \omega_1 \tau$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia

(do porównywania własności układów drgających tłumionych)

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_0 \exp(-t/2\tau)}{A_0 \exp(-t + T_1)/2\tau} = \frac{T_1}{2\tau} = \beta T_1$$

DRGANIA WYMUSZONE OSCYLATORA HARMONICZNEGO

- Na układ drgający tłumiony działa zewnętrzna siła harmoniczna: $F = F_0 \sin \omega t$
- Równanie ruchu ma postać: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$, $(\omega_o^2 = \frac{k}{m}; \frac{1}{\tau} = \frac{f}{m} = 2\beta)$
- Szukamy rozwiązania w postaci $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ $\dot{x} = \dots$ $\ddot{x} = \dots$

Podstawiamy do równania ruchu i otrzymujemy układ równań na A i φ .

φ - przesunięcie fazowe prędkości względem siły wymuszającej

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

A - amplituda

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}$$

- Rezonans** ($\omega \approx \omega_o$)

Gdy $\omega \uparrow \neq 0$, $A \uparrow$ i $\varphi \uparrow$

Warunek na maksimum amplitudy: $dA/d\omega = 0$

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2] = 0 \quad (*)$$

pierwiastek równania (*)

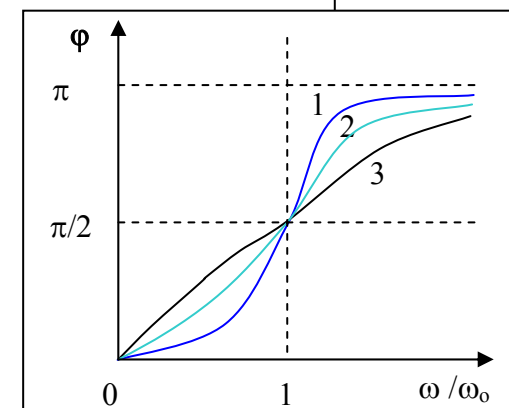
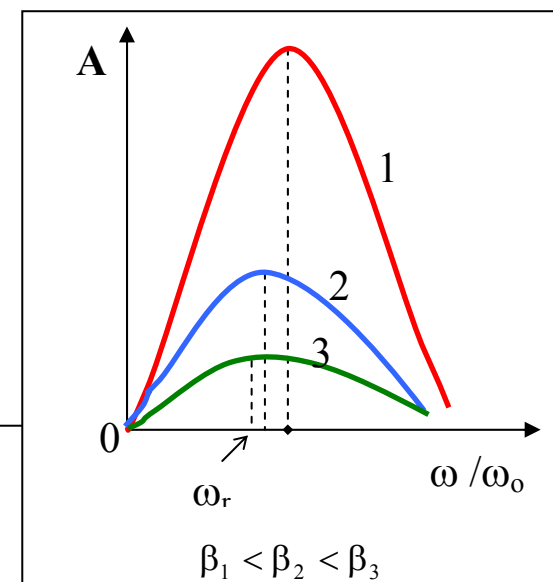
dla $\omega_r \approx \omega_o$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_o^2 - (1/2\tau)^2}$$

dla $\omega = \omega_r$

$$A(\omega_r) = \frac{(F_0 \tau) / m}{\sqrt{\omega_o^2 - (1/2\tau)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\omega_r \tau$$



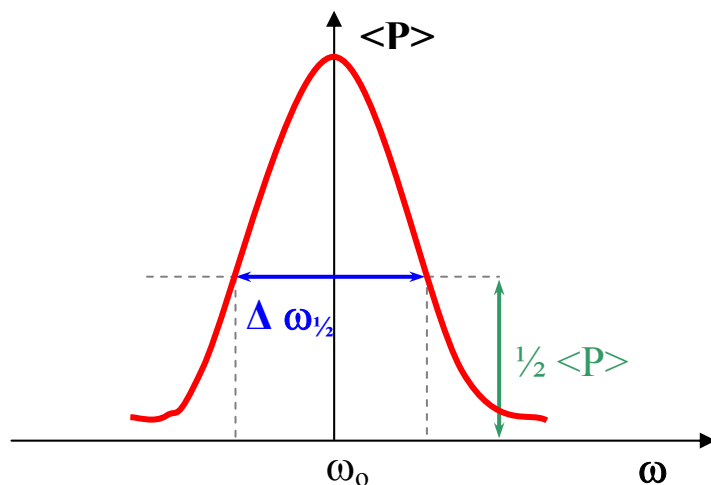
Dla małego tłumienia ($\omega \gg 1/\tau$)

- Średnia moc absorbowana przez układ (średnia praca siły wymuszającej w jednostce czasu)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F v dt$$

krzywa rezonansowa Lorentza

$$\langle P \rangle = \frac{F_0}{T} \omega A_0 \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{F_0^2}{2m} \frac{\omega^2 / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}$$



Krzywa rezonansowa Lorentza

- Dobroć

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{\Delta \omega_{1/2}};$$

$$\Delta \omega_{1/2} = \frac{1}{\tau} = 2\beta;$$

$\Delta \omega_{1/2}$ - szerokość połówkowa krzywej rezonansowej

Dla obwodu drgającego LC

L- indukcyjność cewki
C- pojemność kondensatora

