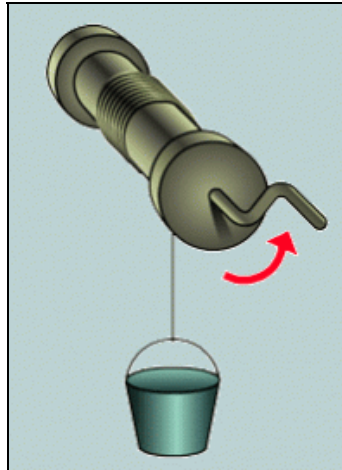


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ

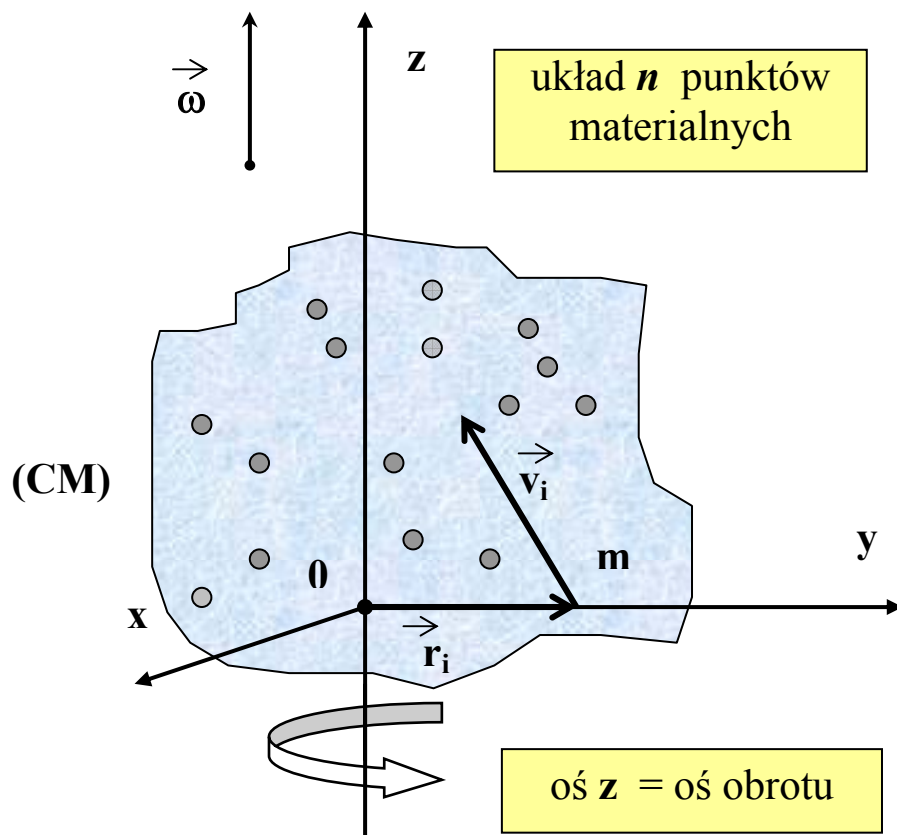
RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ

- **Ciało Doskonale Sztywne (Bryła Sztywna)** = model ciała rzeczywistego = układ „n” oddziaływujących cząstek których wzajemne odległości nie ulegają zmianie
- Ciało wykonuje ruch obrotowy względem osi obrotu, tj. układu punktów, które znajdują się w spoczynku
- Wektor prędkości kątowej ω jest wektorem, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem osi obrotu
- Wielkości opisujące ruch układu cząstek: $n_i = i$ - ta cząstka $(m_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i, \omega)$
wszystkie cząstki posiadają tę samą prędkość kątową

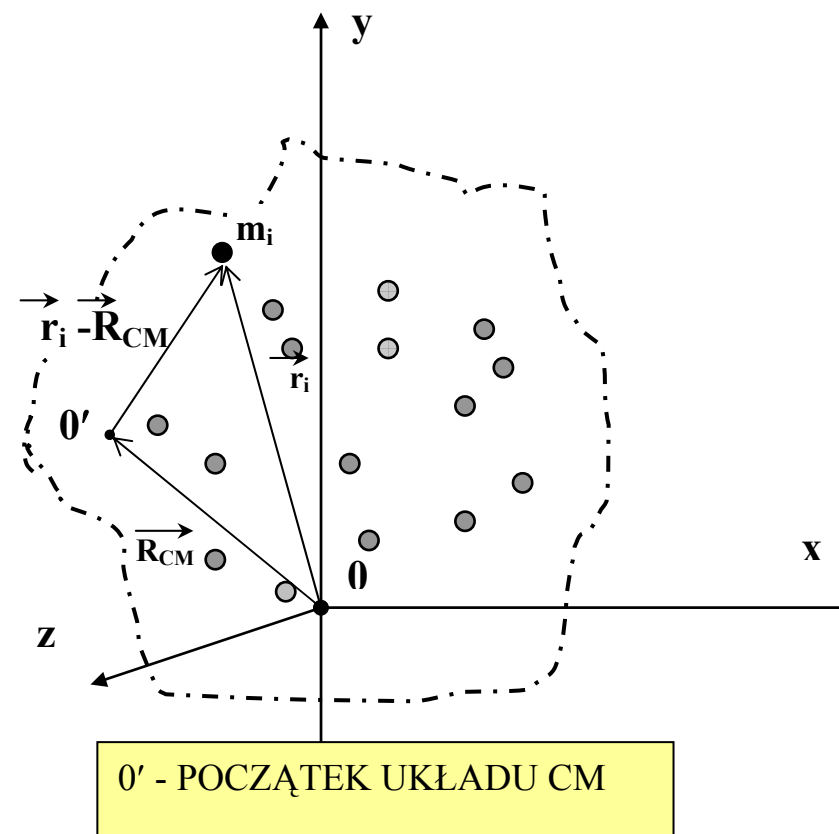


ŚRODEK MASY UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH (ŚRODEK MASY BRYŁY SZTYWNEJ)

Rys. 22.



Rys. 23.



Definicja CM (= Center Mass)

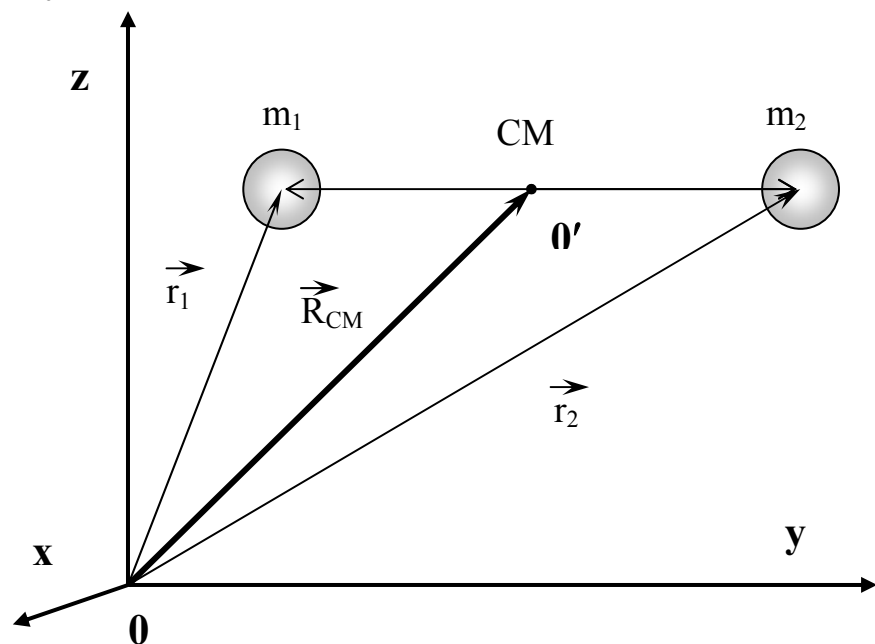
$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Uwaga: w dalszym zapisie wzorów sumowanie po liczbie cząstek **nie będzie** oznaczane wskaźnikami przy znaku sumy, tzn.

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum x_i$$

UKŁAD DWÓCH PUNKTÓW MATERIALNYCH (DWÓCH CZĄSTEK), przykład

Rys. 24.



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

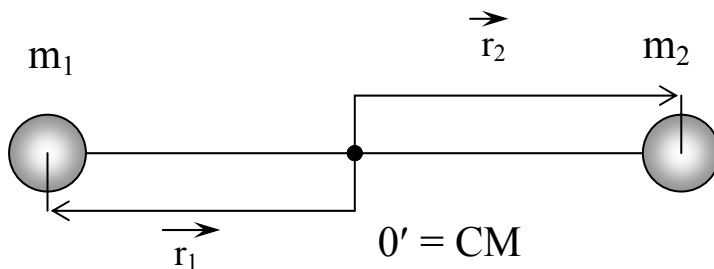
Gdy początek układu odniesienia znajduje się w środku masy ($O' = CM$)

$$\vec{R}_{CM} = 0$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

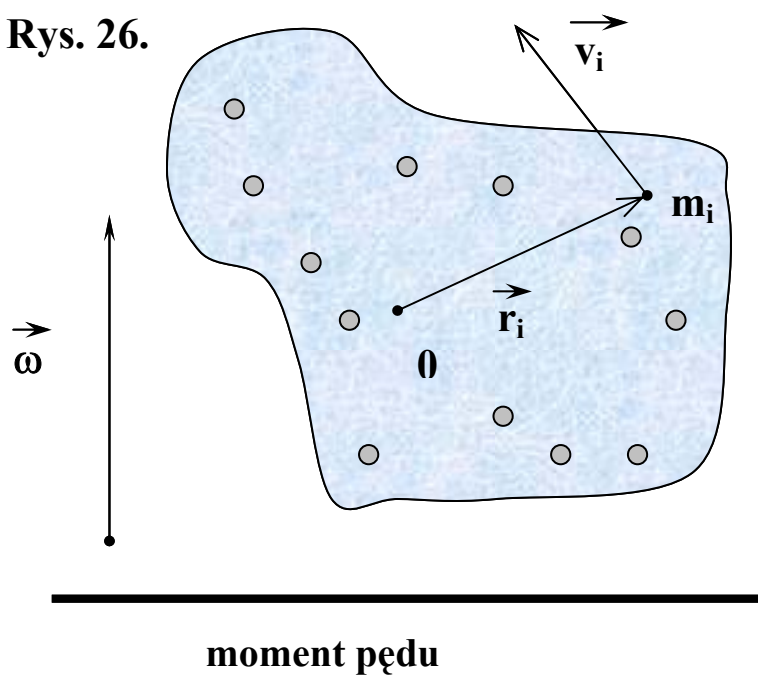
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Rys. 25.

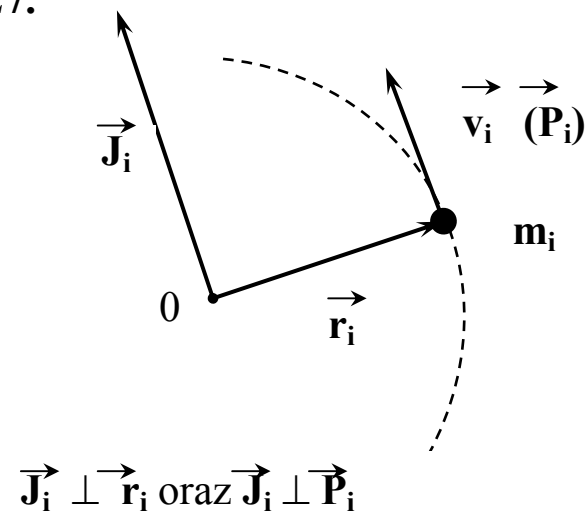


PĘD, MOMENT PĘDU, MOMENT SIŁY

Rys. 26.



Rys. 27.

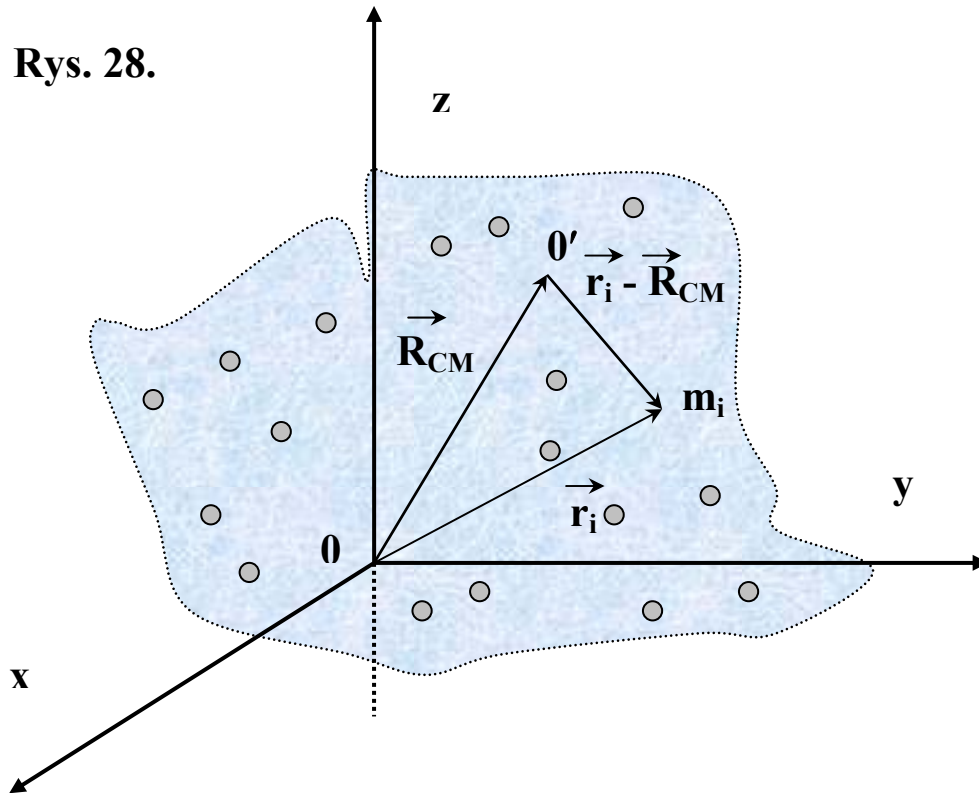


	Punkt materialny	Układ punktów materialnych (bryła sztywna)
Pęd	$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$	$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$
Moment pędu	$\vec{J}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$	$\vec{J} = \sum \vec{J}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$
Moment siły	$\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$	$\vec{N} = \sum \vec{N}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

ROLA MOMENTU PĘDU I MOMENTU SIŁY W RUCHU OBROTOWYM BRYŁY SZTYWNEJ

- CM = środek masy bryły sztywnej
- $\vec{R}_{CM}$ = wektor położenia środka masy

Rys. 28.



$$\vec{J} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{v}_i + \sum m_i \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_i$$

$$\vec{J} = \vec{J}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$$

SPIN = moment pędu bryły sztywnej względem środka masy (własny moment pędu, nie zależy od układu odniesienia):

$$\vec{J}_{CM} = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{v}_i$$

Moment pędu środka masy względem początku układu (zależy od wyboru układu odniesienia):

$$\vec{R}_{CM} \times \sum m_i \vec{v}_i = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$$

RÓWNANIE RUCHU OBROTOWEGO BRYŁY SZTYWNEJ

- Aby wprowadzić bryłę sztywną w ruch obrotowy należy zadziałać momentem siły $\vec{N}$.

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$$
$$\vec{J} = \vec{J}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego.

Zmiana całkowitego momentu pędu przypadająca na jednostkę czasu jest równa wypadkowemu momentowi sił działającemu na bryłę sztywną.

$$\vec{N} \equiv 0 \rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{J} = \text{const}$$

Prawo zachowania momentu pędu

Gdy na bryłę sztywną nie działa zewnętrzny moment sił, lub wypadkowy moment sił jest równy zeru, to moment pędu jest wielkością stałą w czasie.

- Gdy początek układu odniesienia znajduje się w środku masy CM, całkowity moment pędu równy jest spinowi. Wówczas:

$$\vec{R}_{CM} \times \vec{P} = 0$$
$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{J}_{CM}}{dt} = \vec{N}$$

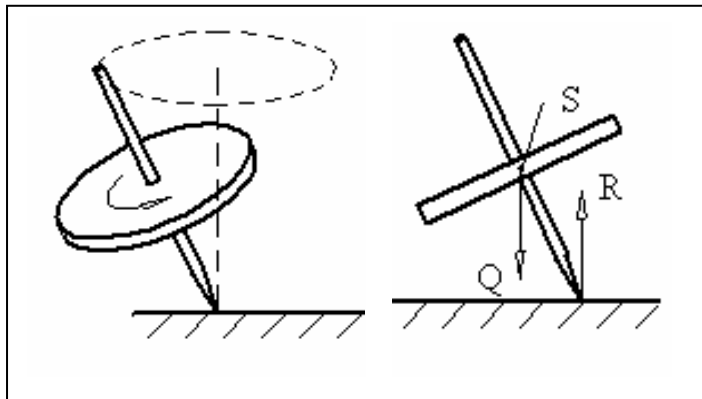
oraz

$$\vec{N} = 0 \rightarrow \vec{J}_{CM} = \text{const}$$

RUCH OBROTOWY BĄKA SYMETRYCZNEGO (ELEMENTARNA TEORIA ŻYROSKOPU)

- **Bąk symetryczny** = ciało o symetrii osiowej i jednorodnym rozkładzie masy, np. bąk – zabawka, krążek z bolcami umożliwiającymi przyłożenie momentu sił
- Ruch bąka symetrycznego w polu grawitacyjnym. Bąk wirujący ze stałą prędkością kątową wokół osi poziomej doznaje działania pary sił: siły ciężkości i reakcji w punkcie podparcia osi, co powoduje, że moment sił działający na bąka jest różny od zera.

Rys. 29.



R - siła reakcji
podłoża
Q – moment siły
ciężkości



- Własności żyroskopu posiada wiele ciał np: ciała niebieskie w tym Ziemia, pociski karabinowe, wirniki maszyn, koła.
- Żyroskop ma on postać metalowego krążka, który raz wprowadzony w ruch obrotowy zachowuje swoje pierwotne położenie osi obrotu. Żyroskop został wynaleziony w 1852 przez Leona Foucaulta, jako demonstracja zasady zachowania momentu pędu.

Założenia:

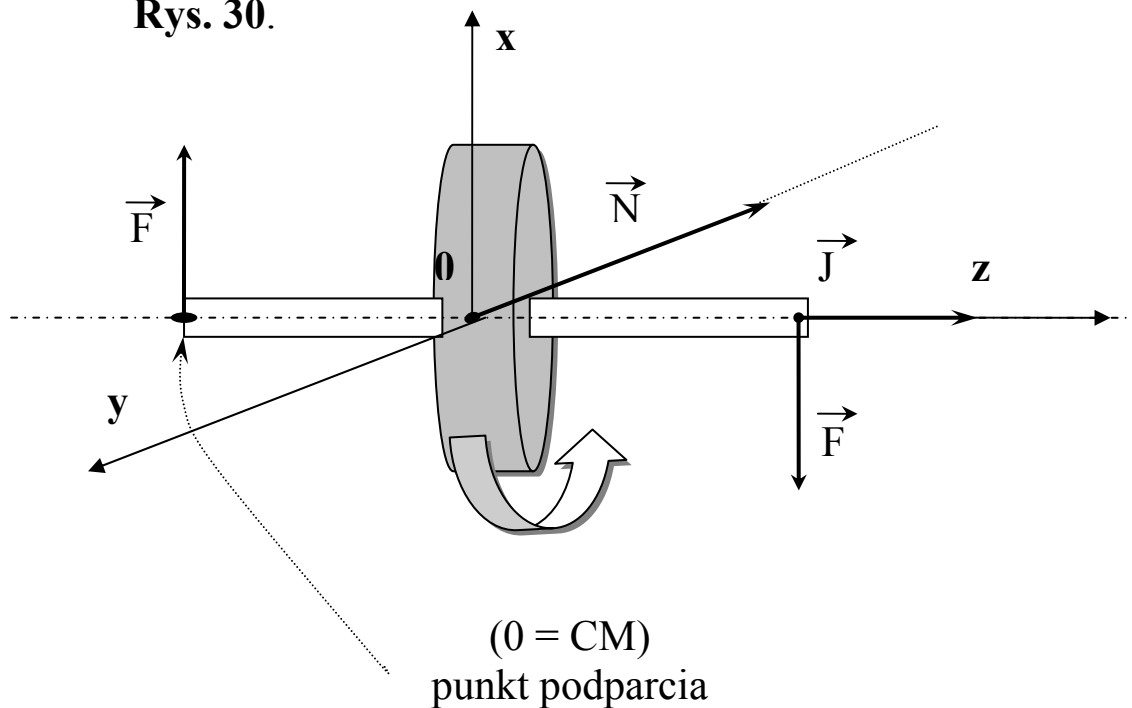
Duża wartość momentu pędu

Moment siły prostopadły do momentu pędu

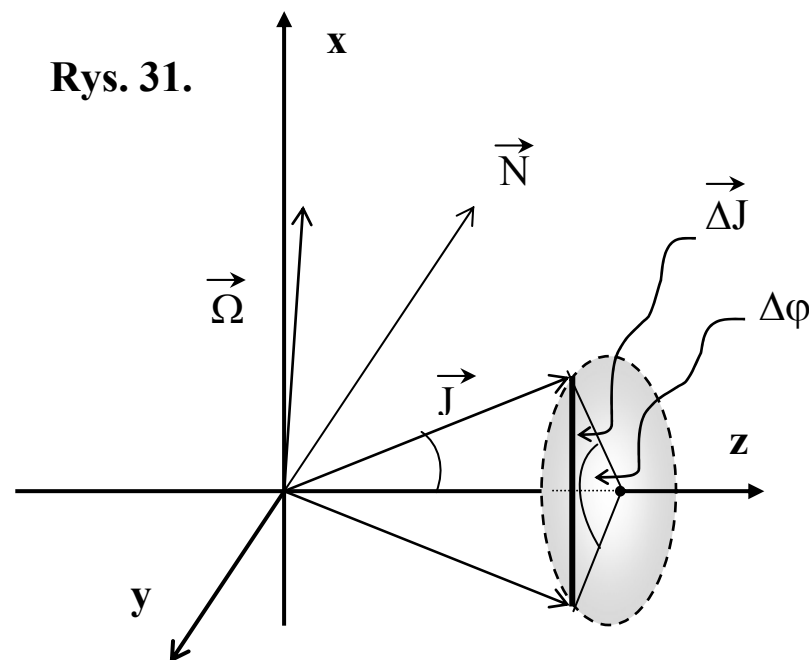
oraz

$$\vec{N} \neq 0, \quad |\vec{J}| = \text{const}, \quad \Delta \vec{J} \neq 0, \quad \vec{N} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t}$$

Rys. 30.



Rys. 31.



Prędkość kątowna precesji: $\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$

w mierze łukowej kąta: $\Delta\phi = \frac{\Delta J}{J}$

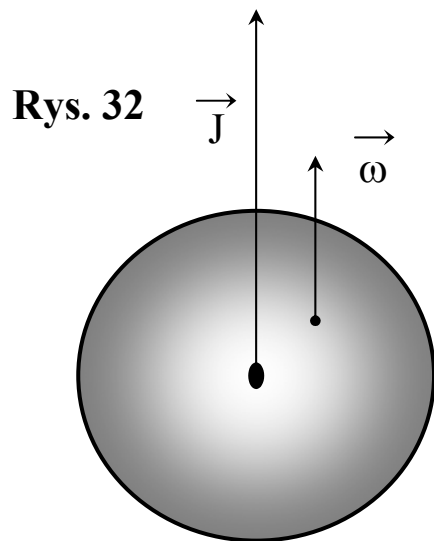
$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta J}{J} = \frac{1}{J} \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{1}{J} N$$

$$|\vec{\Omega}| = \frac{N}{J}$$

$$\vec{N} = \vec{\Omega} \times \vec{J}$$

MOMENT BEZWŁADNOŚCI BRYŁY SZTYWNEJ

- Wirująca swobodnie kula jednorodna



wirująca swobodnie kula jednorodna

zawsze
 $\vec{J} \parallel \vec{\omega}$

- Zawsze $\vec{J}$ jest równoległe do $\vec{\omega}$. Wówczas moment pędu jest proporcjonalny do prędkości kątowej.

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

gdzie I jest współczynnikiem proporcjonalności. Współczynnik ten nosi nazwę **momentu bezwładności**, w tym przypadku momentu bezwładności kuli. Określa on pewną charakterystyczną cechę ciała – rozkład masy ciała względem osi obrotu.

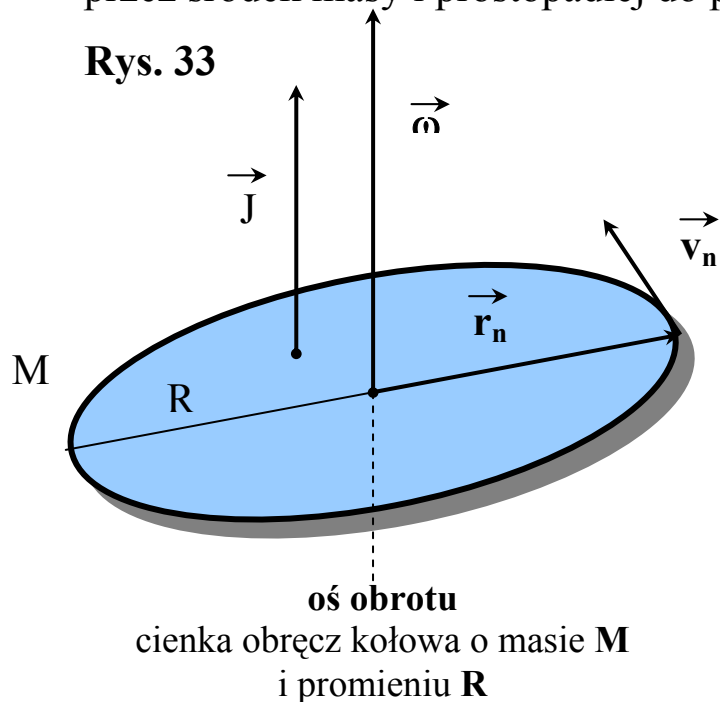
- Powyższa relacja pomiędzy $\vec{J}$ i $\vec{\omega}$ jest również słuszna w przypadku ciał o symetrii osiowej i jednorodnym rozkładzie masy oraz ciał wykonujących ruch obrotowy względem jednej z tzw. osi głównych ciała.

Rysunek	Wzór na moment bezwładności	Opis
	$I = 0,4mR^2$	Kula o promieniu R – oś obrotu przechodzi przez środek kuli

- Moment bezwładności obręczy

Cienka obręcz kołowa o masie M i promieniu R wykonująca ruch obrotowy względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny obręczy.

Rys. 33



Prędkość liniowa i kątowna wszystkich Punktów materialnych, z których składa się obręcz jest taka sama:

$$|\vec{v}_i| = |\vec{v}| = \omega \cdot r$$

$$|\vec{r}_i| = R$$

$$\vec{J} = \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = M \vec{R} \times \vec{v}$$

$$J = MRv = MR^2 \omega$$

Z definicji, moment bezwładności obręczy względem osi obrotu wynosi:

$$I = MR^2$$

Rysunek	Wzór na moment bezwładności	Opis
	$I = mR^2$	Pierścień o promieniu R (także cylinder i obręcz)

- Ciało sztywne o dowolnym kształcie i dowolnym rozkładzie masy
- $\vec{J} = I\vec{\omega}$, gdy J równoległe do ω
- Na ogół J nie jest równoległe do ω . Jest tak w przypadku, gdy wypadkowy ruch obrotowy jest złożeniem wielu ruchów.

Składowe wektora momentu pędu: $\vec{J} = (\vec{J}_x, \vec{J}_y, \vec{J}_z)$

Składowe wektora prędkości kątowej: $\vec{\omega} = (\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z)$

Związek między J i ω ma postać równania macierzowego:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

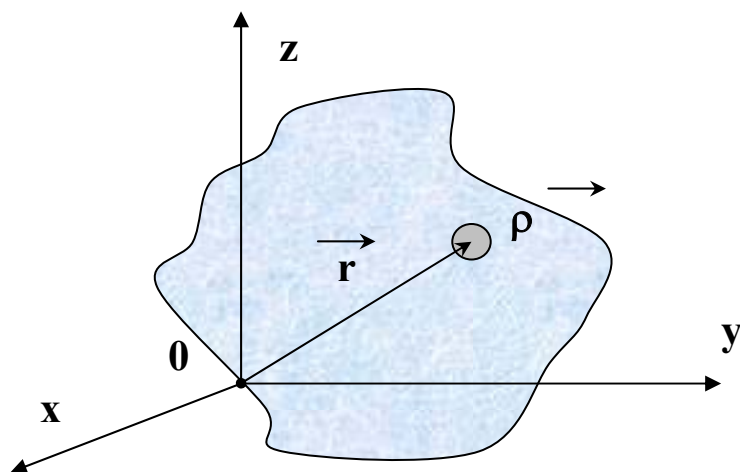
- Moment bezwładności wyrażony jest za pomocą macierzy bezwładności (tensor bezwładności) o własnościach:

Wyrazy poza przekątne są symetryczne, tzn. $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$

Suma wyrazów przekątnych wynosi: $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\sum m_i r_i^2$

- Ogólne wzory na obliczanie wyrazów macierzy bezwładności mają postać całkową

Rys. 34.



Gęstość materii bryły sztywnej w dowolnym punkcie wynosi:

$$\rho(\vec{r})$$

Wektor położenia ma współrzędne

$$\vec{r}(x, y, z)$$

Wyrazy przekątne macierzy bezwładności:

$$I_{xx} = \iiint \rho(\vec{r})(r^2 - x^2) dV$$

Podobna postać mają wzory na I_{yy} i I_{zz} .

Wyrazy poza przekątne tensora bezwładności:

$$I_{xy} = -\iiint \rho(\vec{r})xy dV$$

$$I_{xz} = -\iiint \rho(\vec{r})xz dV$$

podobna postać mają pozostałe wyrazy.

Ponadto

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \iiint \rho(\vec{r})r^2 dV$$

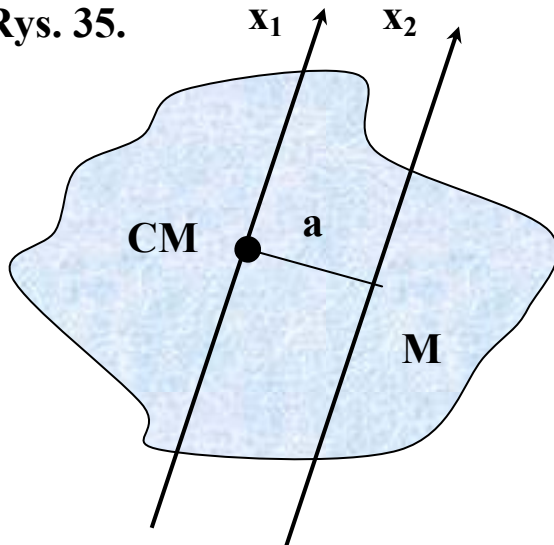
oraz wyrazy poza przekątne są symetryczne.

Obliczenia upraszczają się, gdy rozkład masy ciała posiada wysoka symetrię względem osi obrotu.

TWIERDZENIE O OSIACH RÓWNOLEGLYCH (Twierdzenie Steinera)

- Osie obrotu x i x' są równoległe i oddalone o odcinek a
- Oś x przechodzi przez środek masy CM, M = masa ciała

Rys. 35.



$$I_{x'} = I_x + Ma^2$$



Twierdzenie:

Moment bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi obrotu, równoległej do osi przechodzącej przez środek masy, jest sumą momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez CM i iloczynu masy ciała przez kwadrat odległości między osiami obrotu.

ENERGIA ROTACJI = ENERGIA KINETYCZNA CIAŁA DOSKONALE SZTYWNEGO W RUCHU OBROTOWYM

- Ciało doskonale sztywne wykonuje obrót wokół nieruchomego środka masy,
- Całkowita energia kinetyczna ciała jest równa sumie energii kinetycznych poszczególnych punktów materialnych, z których ciało się składa:

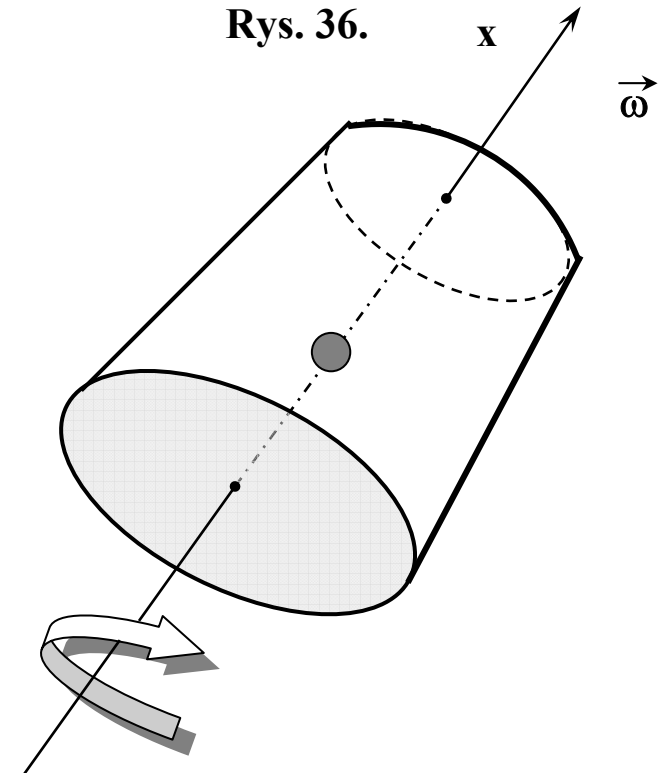
$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dV$$

- Ciało o symetrii osiowej (stożek, walec, kula, itp.)

Rys. 36.



OSIE GŁÓWNE CIAŁA

- Wzór na energię kinetyczną ciała można zapisać w postaci:

$$E_k = \frac{I}{2} [\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x \omega_y I_{xy} + 2\omega_y \omega_z I_{yz} + 2\omega_x \omega_z I_{xz}]$$

Wyrażenie powyższe upraszcza się dla ciał o regularnym kształcie w układzie tzw. osi głównych ciała.

- Definicja **osi głównych**:

W układzie osi głównych wyrażenie na energię kinetyczną przyjmuje postać:

$$E_k = \frac{I}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{I}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{I}{2} I_{zz} \omega_z^2 = \frac{I}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{I}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{I}{2} I_3 \omega_3^2$$

Indeksy 1, 2, 3 numerują osie główne ciała: osie obrotu o największej, najmniejszej i pośredniej wartości momentu bezwładności

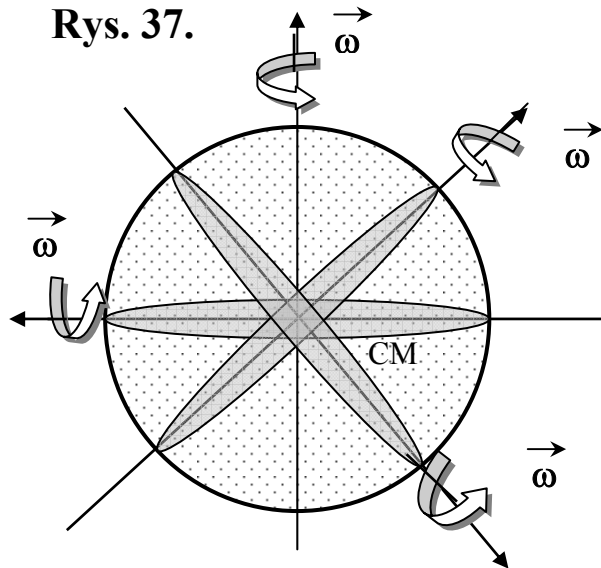
- W układzie osi głównych moment pędu posiada składowe

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3) \\ J_1 &= I_1 \omega_1 \\ J_2 &= I_2 \omega_2 \\ J_3 &= I_3 \omega_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3 = I \\ \omega_1^2 &= \omega_2^2 = \omega_3^2 = \omega^2 \\ E_k &= \frac{I}{2} J \omega^2 \end{aligned}$$

I_1, I_2, I_3 - główne momenty bezwładności (maksymalny, minimalny, pośredni)

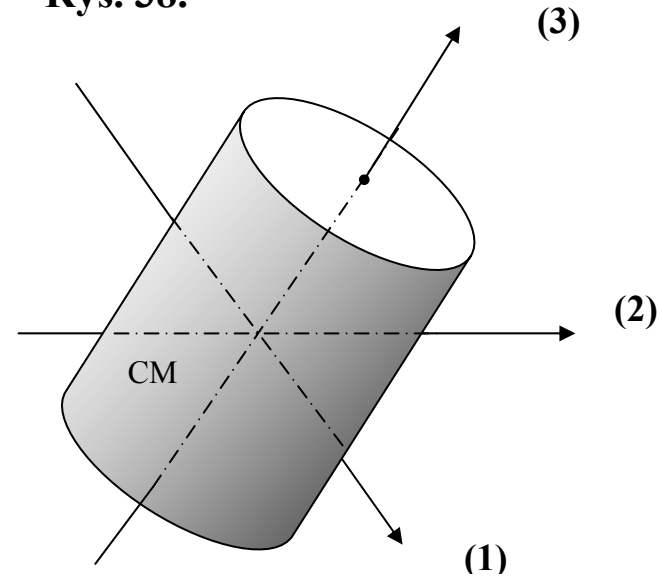
- Jeżeli ciało obraca się wokół którejś z osi głównych, to wektor momentu pędu ciała jest równoległy do wektora prędkości kątowej.

Rys. 37.



- **Kula, powłoka kulista** o jednorodnym rozkładzie masy – wszystkie osie przechodzące przez środek masy są osiami głównymi.

Rys. 38.



- **Walec jednorodny** – oś podłużna i dwie osie do niej prostopadłe są osiami głównymi.

- Ciało sztywne wirujące swobodnie wokół osi o maksymalnym lub minimalnym momencie bezwładności zachowuje stały kierunek tej osi w przestrzeni (zasada działania stabilizatorów).

PRAWA ZACHOWANIA W MECHANICE (PĘDU, ENERGII, MOMENTU PĘDU)

• PRAWO ZACHOWANIA PĘDU

- Całkowity pęd cząstek (ciał) tworzących układ zamknięty (izolowany) pozostaje stały w czasie

UKŁAD IZOLOWANY = układ na który nie działają siły zewnętrzne

$$\vec{P} = [m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}]$$

$(t = -\infty, t = +\infty)$

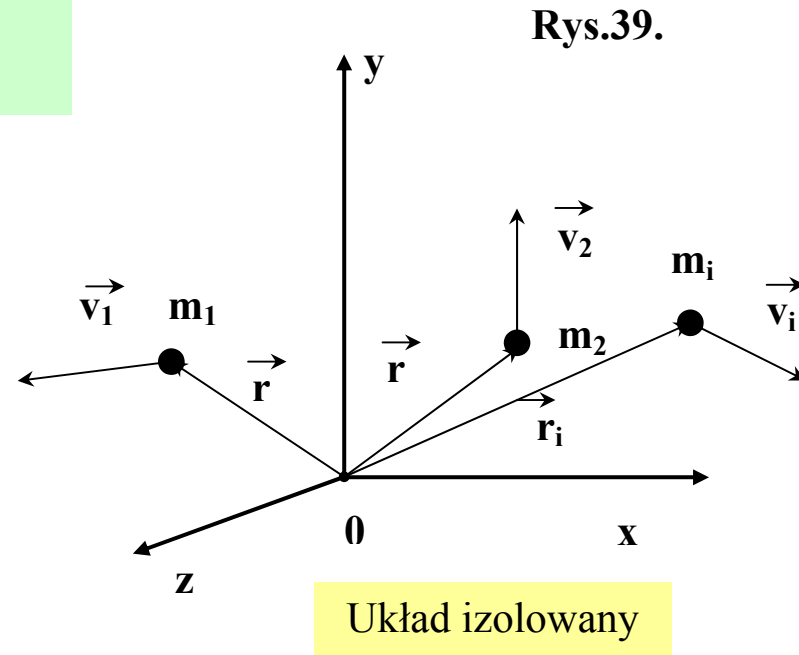
$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

- Klasycznie, masa i-tej cząstki

$$m_i = \text{const}$$

- Relatywistycznie, masa i-tej cząstki wynosi

$$m_i = \gamma_i m_{i0}$$
$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}$$



- **PRAWO ZACHOWANIA ENERGII**

- Całkowita energia izolowanego układu cząstek (ciał) pozostaje stała w czasie

Układ izolowany = układ, który nie wymienia energii z otoczeniem

$$E_k = E_p(\vec{r}) = \text{const}$$

$$(t = -\infty, t = +\infty)$$

$$E_k = \sum E_{ki}$$

$$E_p = \sum E_{pi}$$

- Klasycznie, energia kinetyczna i-tej cząstki wynosi: $E_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$
- Relatywistycznie: $E_{ki} = (\gamma_i - 1)m_{0i}c^2$
- Energia potencjalna $E_p(r)$ jest określona dla potencjalnego pola sił, tj. pola sił zachowawczych (grawitacyjnych, kulombowskich)

- **PRAWO ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU**

- Całkowity moment pędu izolowanego układu cząstek (ciał) pozostaje stały w czasie

Układ izolowany = układ, na który nie działa zewnętrzny moment sił, lub wypadkowy moment sił jest równy zeru

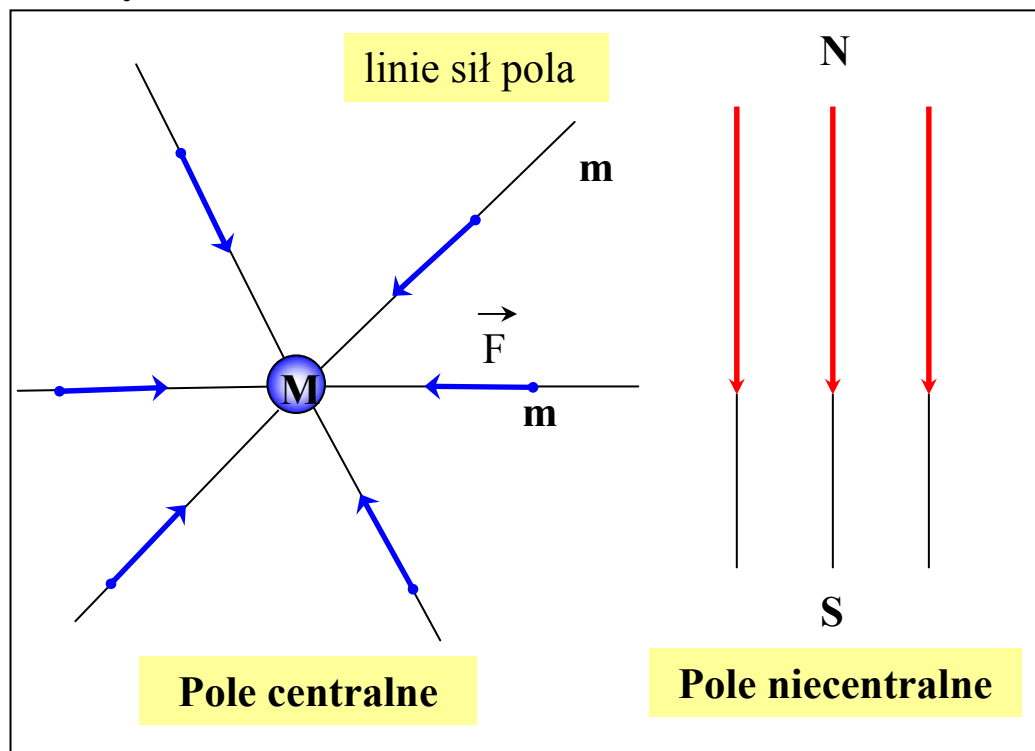
$$\vec{J} = \sum \vec{J}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$(t = -\infty, t = +\infty)$$

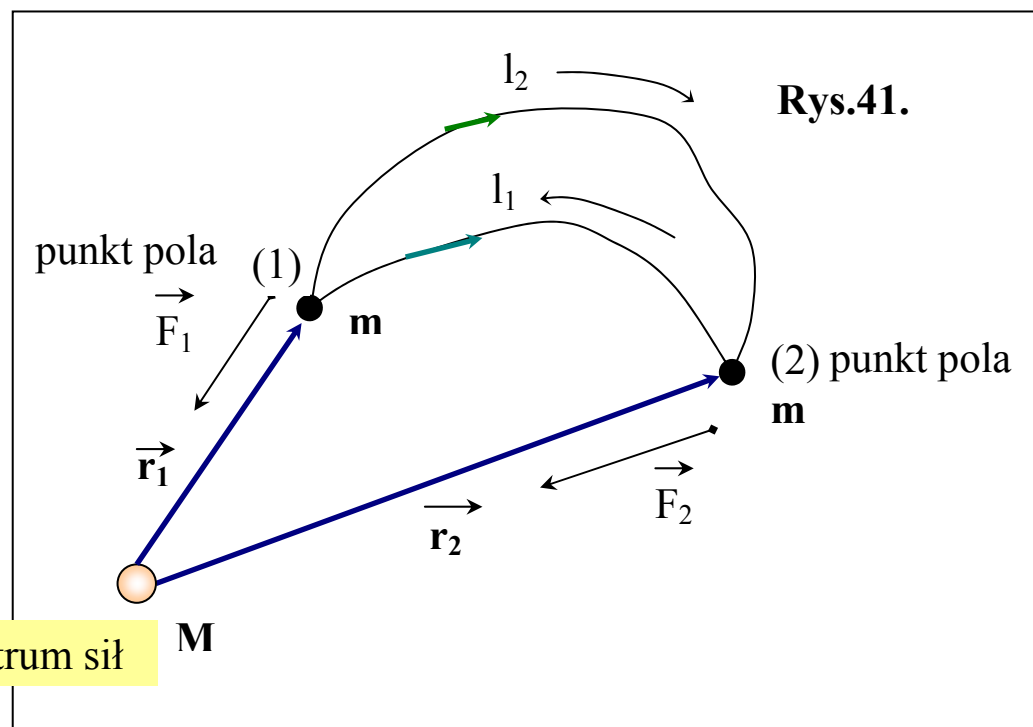
$$\vec{N} = \sum \vec{N}_i = 0$$

RUCH CIAŁ W POTENCJALNYM POLU SIŁ

Rys. 40.



Centralne pole sił - pole sił, w którym linie sił są półprostymi zbiegającymi się w jednym punkcie, np. pole grawitacyjne masy punktowej, pole elektrostatyczne ładunku punktowego. Siła działająca między ciałami jest zawsze skierowana wzdłuż prostej łączącej ciała.

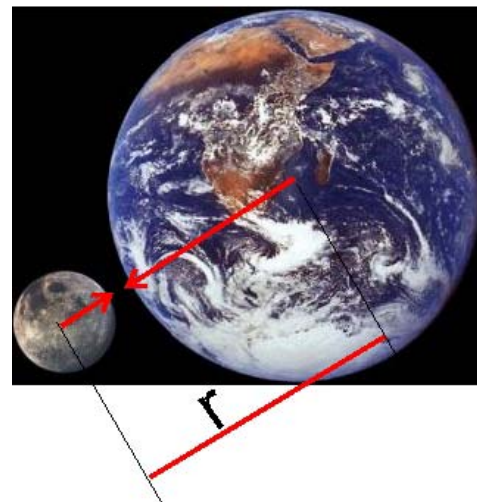
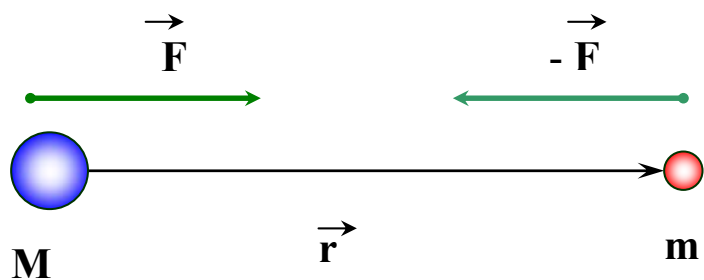


POLE GRAWITACYJNE MAS PUNKTOWYCH

- Siłę działającą między dwoma masami punktowymi można zapisać za pomocą wzoru, który wyraża matematyczną postać prawa powszechnego ciążenia (prawa grawitacji, prawa Newtona).

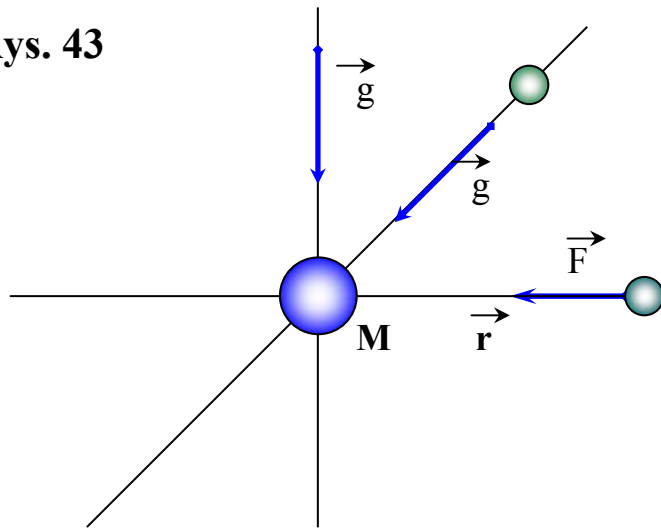
$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Rys. 42



NATEŻENIE POLA GRAWITACYJNEGO

Rys. 43



M - masa ciała wytwarzającego pole grawitacyjne,
m – masa ciała „próbego”

Miarą natężenia pola grawitacyjnego jest siła działająca na ciało o masie jednostkowej, umieszczone w danym punkcie pola:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Gdy oddziałują masy punktowe, wzór na g przybiera postać:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Wartość natężenia pola grawitacyjnego opisuje dynamiczne własności pola: zależy tylko od masy ciała wytwarzającego pole i położenia punktu pola w przestrzeni; nie zależy od własności ciała próbnego.

PRACA W POLU GRAWITACYJNYM

- Ciało o masie M wytwarza pole.

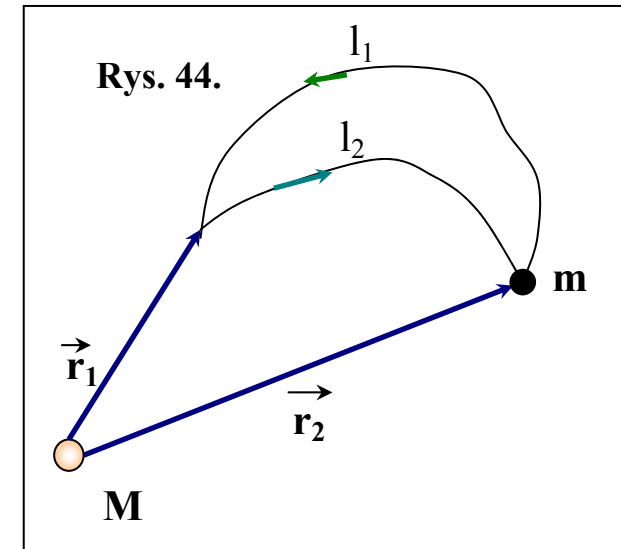
W polu tym przemieszczamy masę próbną z punktu 1 do punktu 2.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Praca wykonana podczas przemieszczenia ciała:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{GMm}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$(\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr)$



- Praca wykonana przez siły pola.** Ciało o masie m znajduje się pod wpływem siły grawitacji i jego położenie końcowe znajduje się bliżej źródła pola M : $r_2 < r_1 \Rightarrow W > 0$
- Praca wykonana przez siły zewnętrzne.** Ciało ulega przemieszczeniu pod wpływem siły zewnętrznej, powodującej oddalenie ciała od źródła pola : $r_2 > r_1 \Rightarrow W < 0$
- Siły grawitacyjne są siłami zachowawczymi $\Leftrightarrow$ pole grawitacyjne jest polem zachowawczym

$$W = \int_{r_1(l_1)}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1(l_2)}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

ENERGIA POTENCJALNA CIAŁA W POLU SIŁ GRAWITACYJNYCH

- **Praca** wykonana w polu grawitacyjnym jest równa różnicy energii potencjalnej ciała w położeniu początkowym i końcowym

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

- **Energia potencjalna** ciała określona jest ujemnie

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = -\frac{GMm}{r_1} - \left(-\frac{GMm}{r_2} \right) \quad U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

- **Energia potencjalna** ciała znajdującego się poza zasięgiem sił grawitacyjnych (w nieskończoności) jest równa zero

$$U(\infty) = 0$$
$$U(r) = -\int_r^{\infty} F(r) dr = \int_{\infty}^r F(r) dr = -\frac{GMm}{r}$$

Energia potencjalna ciała w danym położeniu (w danym punkcie pola) jest równa pracy jaką trzeba wykonać, aby ciało przenieść do nieskończoności (poza zasięg sił grawitacji).

POTENCJAŁ POLA GRAWITACYJNEGO

- Potencjał pola grawitacyjnego w odległości r od centrum sił jest równy energii potencjalnej ciała próbnego o masie jednostkowej znajdującego się w danym punkcie pola

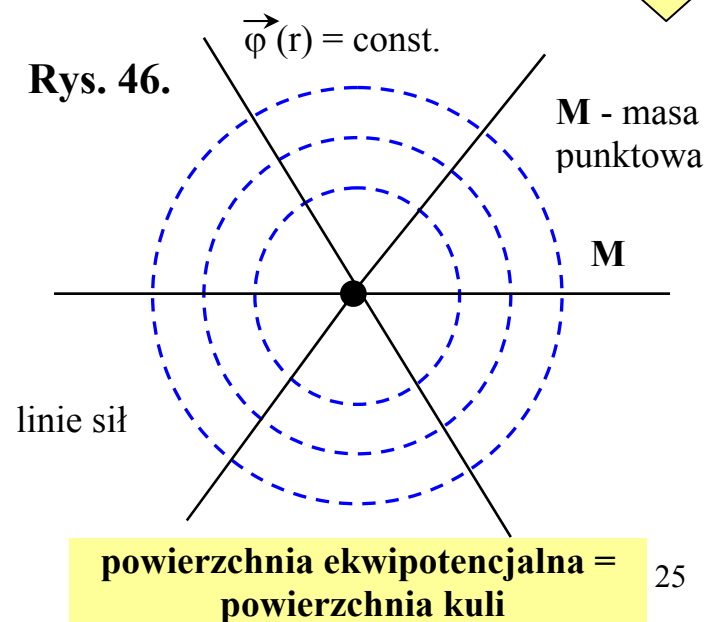
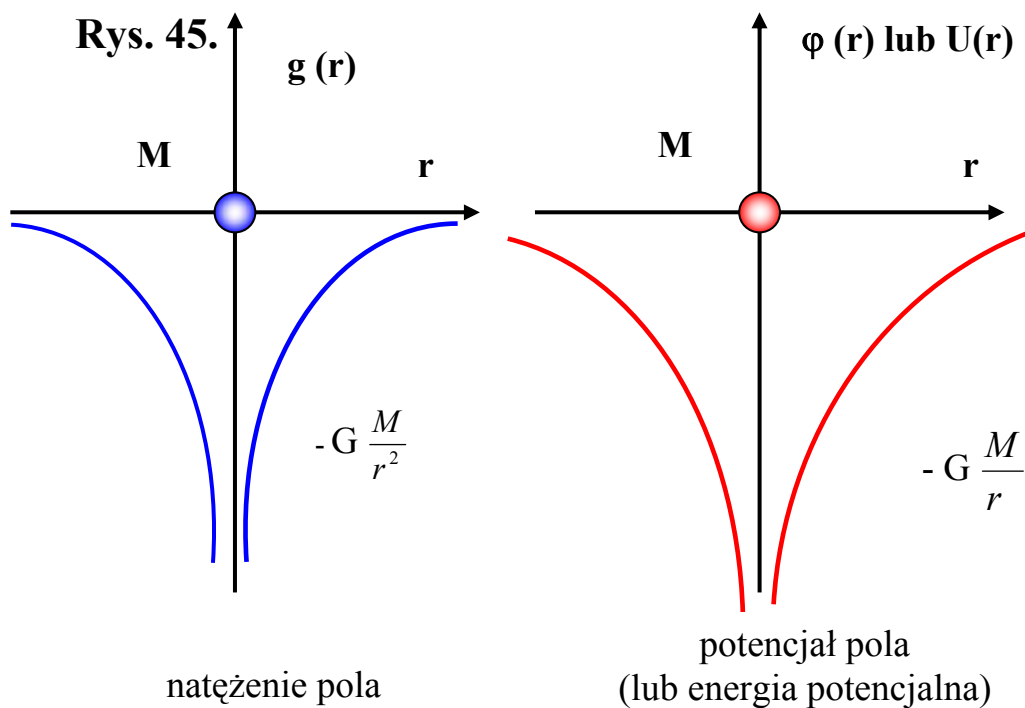
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m}$$

$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

- Potencjał pola opisuje własności statyczne pola: zasób energii potencjalnej, którą pole zawiera.

Powierzchnie ekwipotencjalne (powierzchnie jednakowego potencjału) stanowią zbiory geometryczne punktów w przestrzeni, w których potencjał pola posiada tę samą wartość, tzn. $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$

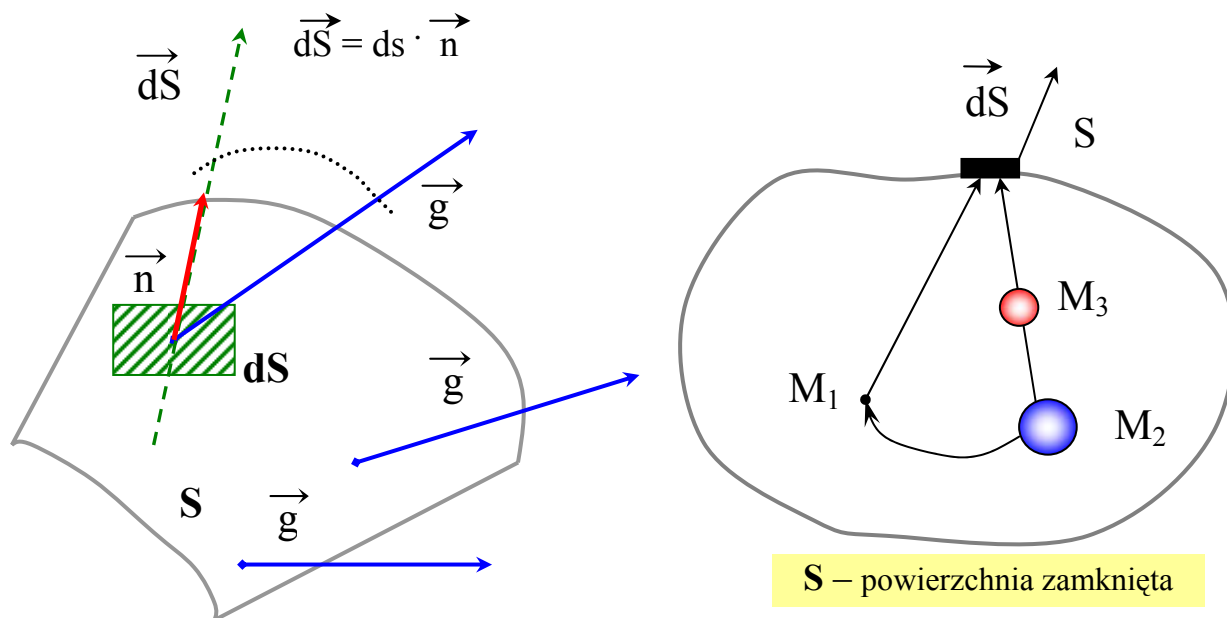
Jeżeli pole grawitacyjne wytwarza masa punktowa, to powierzchnie ekwipotencjalne stanowią powierzchnie kul współśrodkowych, otaczających masę punktową.



PRAWO GAUSSA DLA POLA GRAWITACYJNEGO

- Strumień wektora natężenia pola (strumień pola grawitacyjnego) przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy iloczynowi masy znajdującej się w obszarze ograniczonym tą powierzchnią przez $(-4\pi G)$, gdzie G oznacza stałą grawitacji.

Rys. 47.



$\vec{g}$ - wektor natężenia pola

$\vec{n}$ - wektor jednostkowy o kierunku normalnej do powierzchni

$d\vec{S}$ - wektor kierunkowy elementu powierzchni

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

- Elementarny strumień pola grawitacyjnego

$$d\Phi = \vec{g} \cdot d\vec{S} = g dS \cos(\vec{g}, \vec{n})$$

Strumień pola przez powierzchnię zamkniętą S

$$\Phi = \int d\Phi = \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G$$

- Prawo Gaussa stosuje się do wyznaczania natężenia pola, zwłaszcza w przypadkach pól wytwarzanych przez układ ciał. W przypadku pola wytwarzanego przez masę punktową.
- Prawo Gaussa ma wyjątkowo uproszczoną postać:

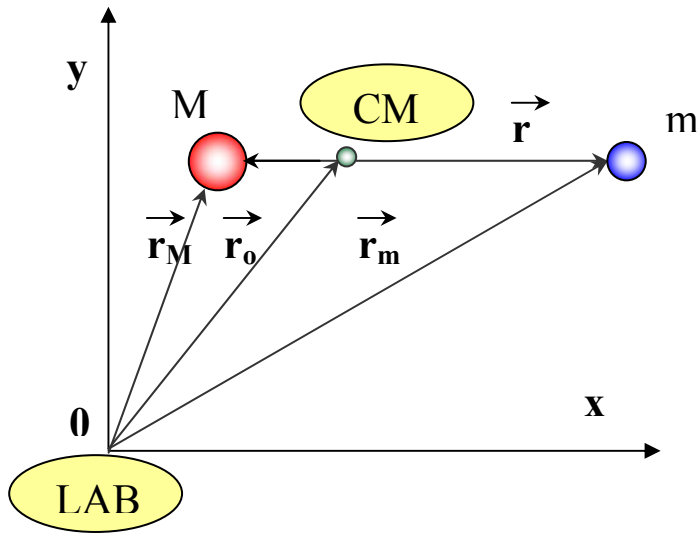
$$g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G M$$

$$g = -\frac{GM}{r^2}$$

RUCH CIAŁ W POLU SIŁ CENTRALNYCH

- Rozważamy oddziaływanie dwóch ciał o porównywalnych masach w układzie laboratoryjnym i układzie środka masy

Rys. 48.



Dwa ciała o masie M i m , ich położenie względem początku układu laboratoryjnego określają wektory $\vec{r}_M$ i $\vec{r}_m$

Położenie środka masy CM wyznacza wektor $\vec{r}_0$

$$\vec{r}_0 = \frac{M\vec{r}_M + m\vec{r}_m}{M + m}$$

Ciała oddziałują ze sobą siłami centralnymi $\vec{F}(\vec{r}), -\vec{F}(\vec{r})$, gdzie

$$\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m$$

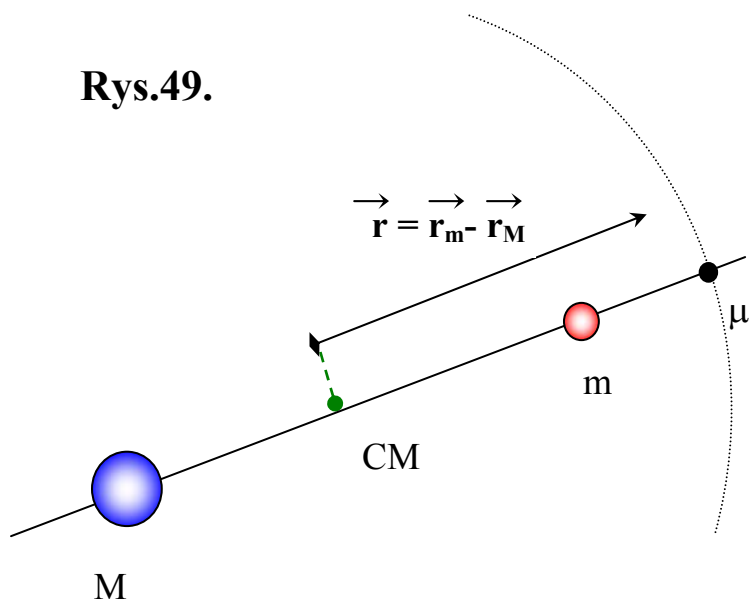
- Wskutek oddziaływania ciała wykonują ruch obrotowy wokół środka masy, którego opis jest skomplikowany w układzie laboratoryjnym (wymaga rozwiązania układu różniczkowych równań ruchu).

- Opis ruchu ciał, ich energii, znacznie się upraszcza w układzie środka masy, jeżeli wprowadzimy ciało o masie zastępczej, tzw. masie zredukowanej, i rozważać będziemy zachowanie się tego ciała. Sprowadzamy w ten sposób problem opisu ruchu dwóch ciał, oddziaływujących siłami centralnymi, do problemu opisu ruchu jednego ciała o masie równej masie zredukowanej:

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

$$\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)$$

Rys.49.

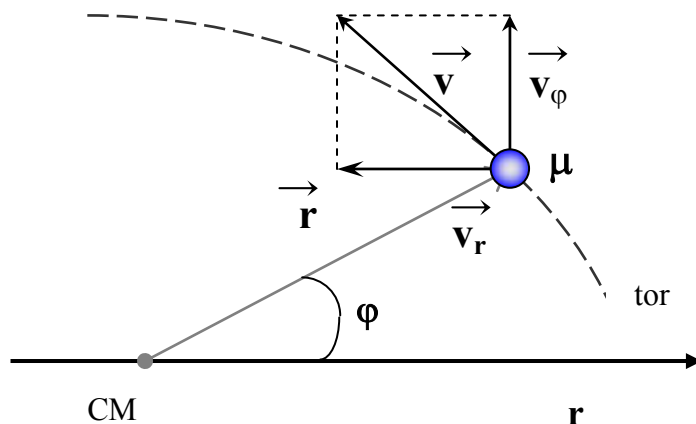


- Jeżeli siła jest siłą centralną, to moment tej siły względem rozważanego środka masy jest równy zero (ramię siły i jej kierunek pokrywają się). Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego wynika, że moment pędu układu ciał jest wielkością stałą. Oznacza to również, że ruch jest płaski (tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie).

ENERGIA CIAŁA W POLU SIŁ CENTRALNYCH

- Układ środka masy ciał, w którym opisujemy ruch masy zredukowanej, stanowić może biegunowy układ współrzędnych. Masa zredukowana μ porusza się po torze krzywoliniowym, a jej chwilowe położenie wyznacza wektor r i kąt φ .

Rys. 50.



Chwilowe wartości prędkości całkowitej oraz jej składowych, tzw. radialnej i azymutalnej wynoszą odpowiednio $\vec{v}, \vec{v}_r, \vec{v}_\varphi$

- Całkowita energia układu $\Leftrightarrow$ energia masy zredukowanej $E = E_{kr} + E_{k\varphi} + E_p$

E_{kr} - energia kinetyczna związana z prędkością radialną

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \mu v_r^2 = \frac{p_r^2}{2\mu} \quad (1)$$

$p_r = \mu v_r$ jest składową radialną pędu masy zredukowanej

$E_{k\varphi}$ - energia kinetyczna związana z prędkością azymutalną

$$E_{k\varphi} = \frac{1}{2} \mu v_\varphi^2 = \frac{J^2}{2\mu r^2} \quad (2)$$

Moment pędu jest wielkością stałą w czasie: $J = p_\varphi r = \mu v_\varphi r = \text{const}$

$$v_\varphi = \frac{J}{\mu r}$$

E_p - energia potencjalna układu ciał w polu sił centralnych

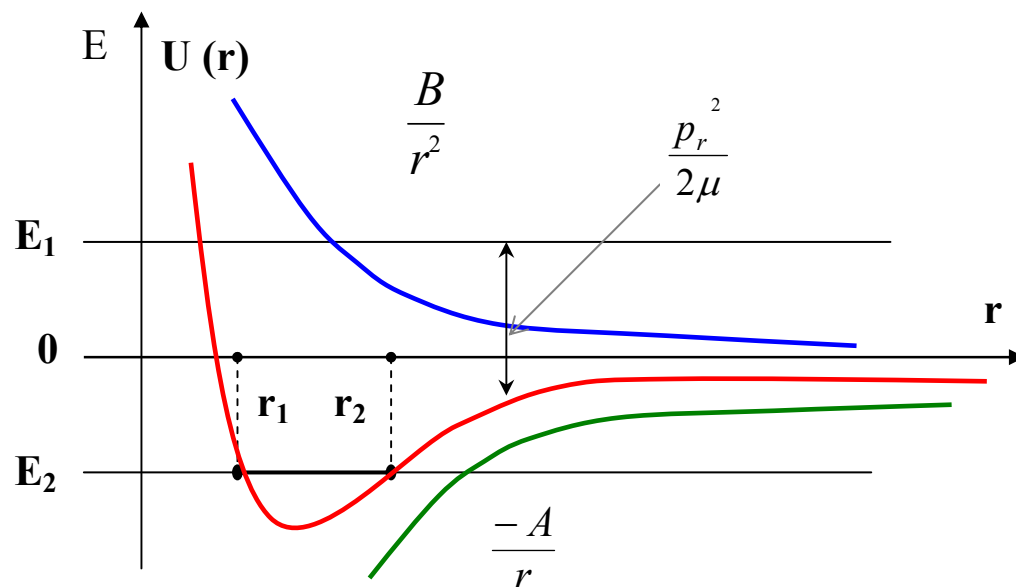
$$E_p = -\frac{A}{r} \quad (3) \quad (E_p = -\frac{GMm}{r})$$

- Energia całkowita masy zredukowanej $E = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{A}{r} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{B}{r^2} - \frac{A}{r} \quad B \equiv \frac{J^2}{2\mu}$

- Energia całkowita masy zredukowanej jest funkcją położenia ciała

$$E(r) = \frac{p_r^2}{2\mu} + U(r) = \text{const}$$

Rys. 51.



Na rysunku r_1 i r_2 oznaczają odległości **największego** i **najmniejszego oddalenia** ciała od centrum sił.

- Całkowita energia masy zredukowanej może być dodatnia lub ujemna. I tak:

Gdy $E > 0$ (np. E_1) ruch ciała po krzywej stożkowej otwartej (parabola, hiperbola).

Gdy $E < 0$ (np. E_2) ruch ciała po krzywej stożkowej zamkniętej (elipsa, koło).

- Jeżeli jedno z ciał wytwarzających **pole grawitacyjne posiada dużą masę tak, że $M \gg m$** , to **środek masy układu pokrywa się** z położeniem ciała o masie M . Wówczas wartość masy zredukowanej układu ciał jest w przybliżeniu równa masie ciała mniejszego m , zaś r oznacza odległość ciała m od centrum sił (M). **Warunki te są spełnione np. w naszym układzie planetarnym, modelu planetarnym atomu.**

SIŁY GRAWITACJI WE WSZECHŚWIECIE

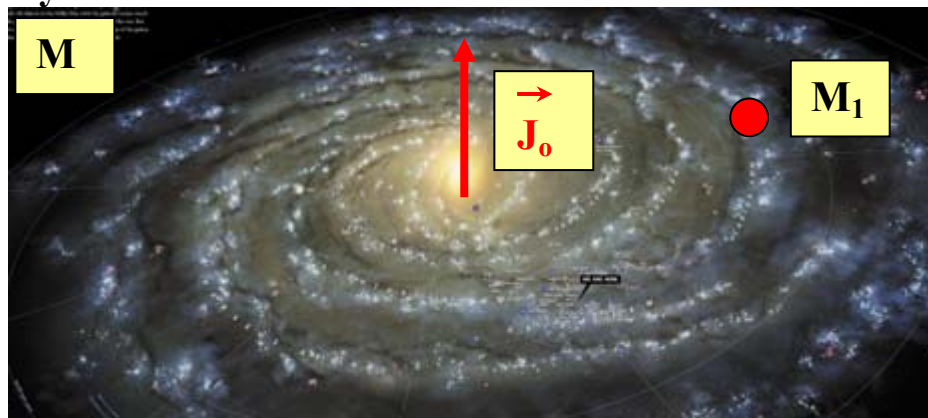
- Kształt Galaktyki, **model Hubble'a**

Gaz kosmiczny o masie M składający się z pojedynczych obiektów, z których jeden posiada masę np. M_1 .

Masa posiada moment pędu $J=const$.

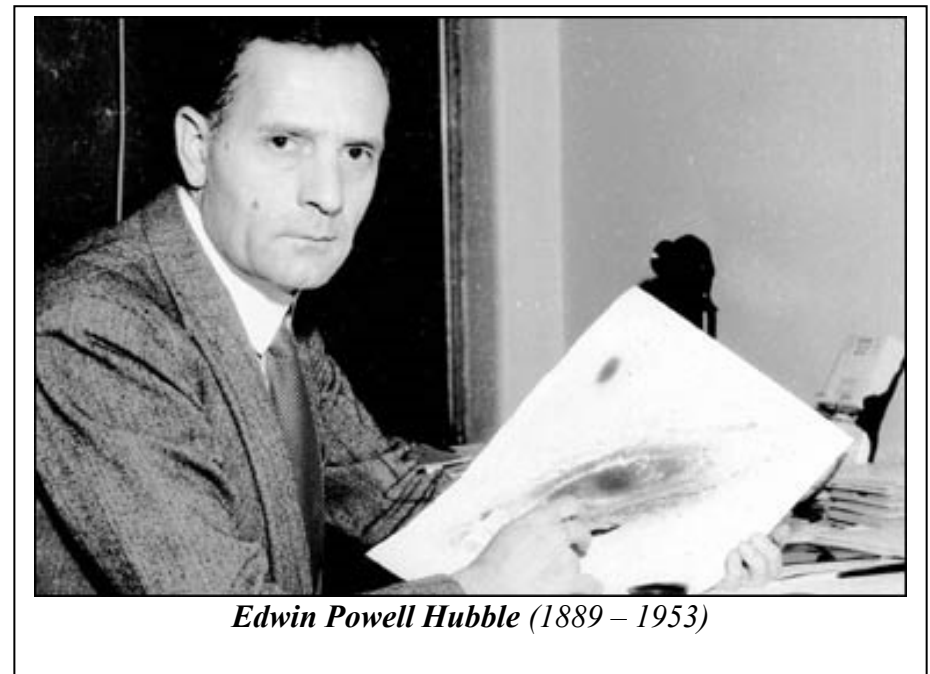
Kształt galaktyki (Model Hubble'a)

Rys. 52.



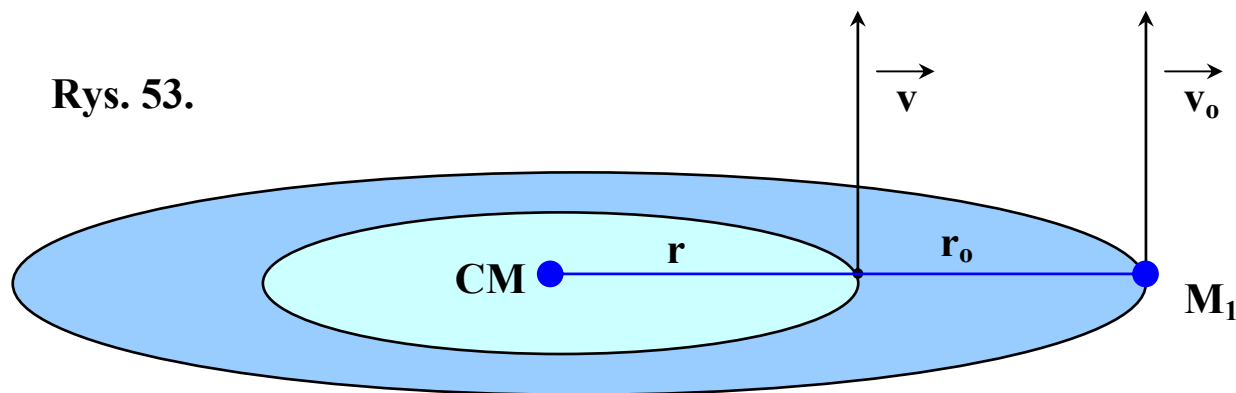
M - masa galaktyki

M_1 – masa pojedynczej cząstki



- Obłok gazu kurczy się pod wpływem oddziaływania grawitacyjnego

Rys. 53.



$$J = \text{const}$$

$$M_1 v_0 r_0 = M_1 v r$$

$$v = v_0 \frac{r_0}{r}$$

gdzie indeks „0” określa wartość prędkości i położenia masy M_1 w chwili $t = 0$, wielkości bez indeksu – w dowolnej chwili czasu t

- Zmiana energii kinetycznej cząstki M_1 wskutek pracy sił grawitacyjnych jest równa zmianie jej energii potencjalnej i wynosi :

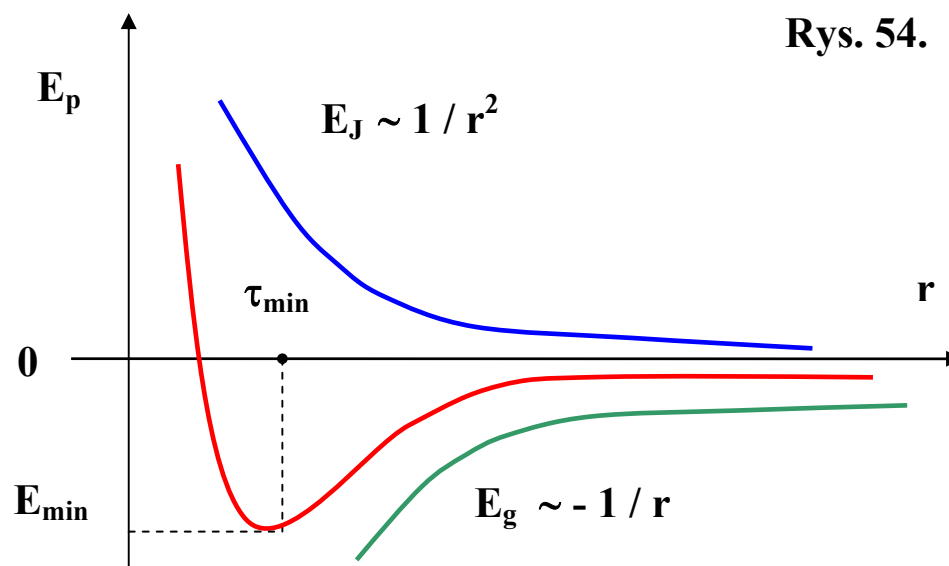
$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M_1 v^2 - \frac{1}{2} M_1 v_0^2 = \frac{1}{2} M_1 v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\Delta E_k = \Delta E_p$$

- Energia potencjalna obiektu M_1 wynosi:

$$E_p = E_g + E_J = -\frac{G M M_1}{r} + \frac{1}{2} M_1 v_0^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2$$

Rys. 54.



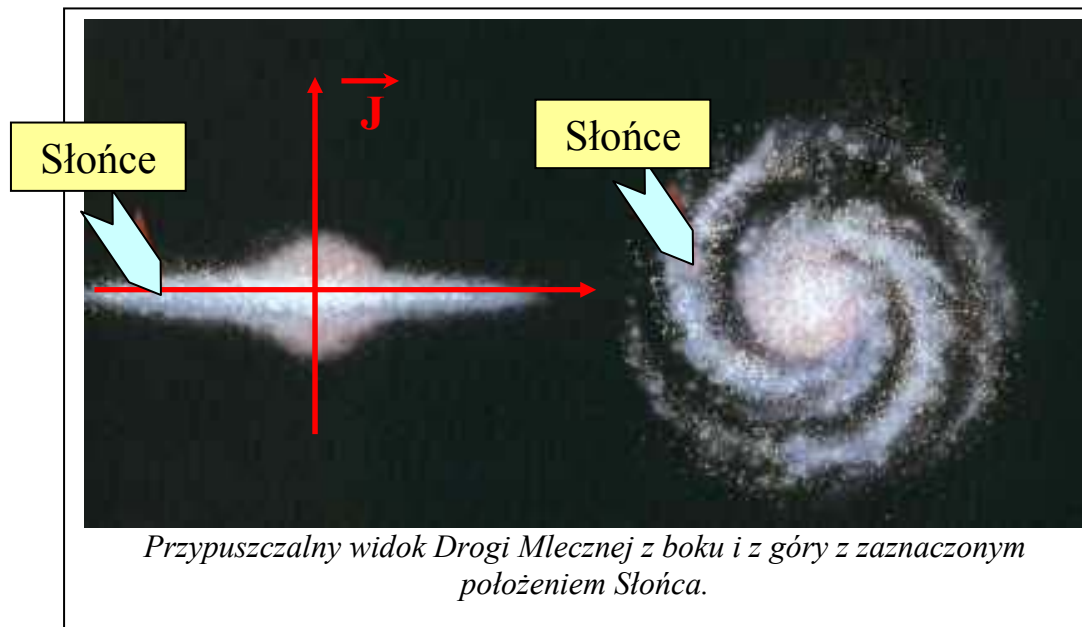
- Kurcząc się grawitacyjnie, obłok gazu osiąga stan równowagi. W stanie równowagi cząstki obłoku posiadają najmniejszą wartość energii potencjalnej (energia potencjalna osiąga minimum). Minimum energii określa warunek:

$$\frac{dE_p}{dr} = 0$$

$$\frac{GM_I M}{r^2} - M_I v_0^2 \frac{r_0^2}{r^3} = 0$$

dla $r = r_{min}$

$$r_{min} = \frac{v_0^2 r_0^2}{GM}$$



Rys. 55.

- W przypadku naszej Galaktyki $r_{min} \sim 10^{20}$ m

- Galaktyka „naprawdę” posiada kształt dysku

NIEKTÓRE PROBLEMY KOSMOLOGII

- rozszerzanie się Wszechświata
- gęstość krytyczna i los Wszechświata
- wiek Wszechświata
- wczesny Wszechświat, jego temperatura, czas trwania epoki leptonowej i hadronowej

Kosmologia obejmuje:

- teorię grawitacji,
- fizykę jąder i cząstek elementarnych,
- termodynamikę,
- fizykę statystyczną.

