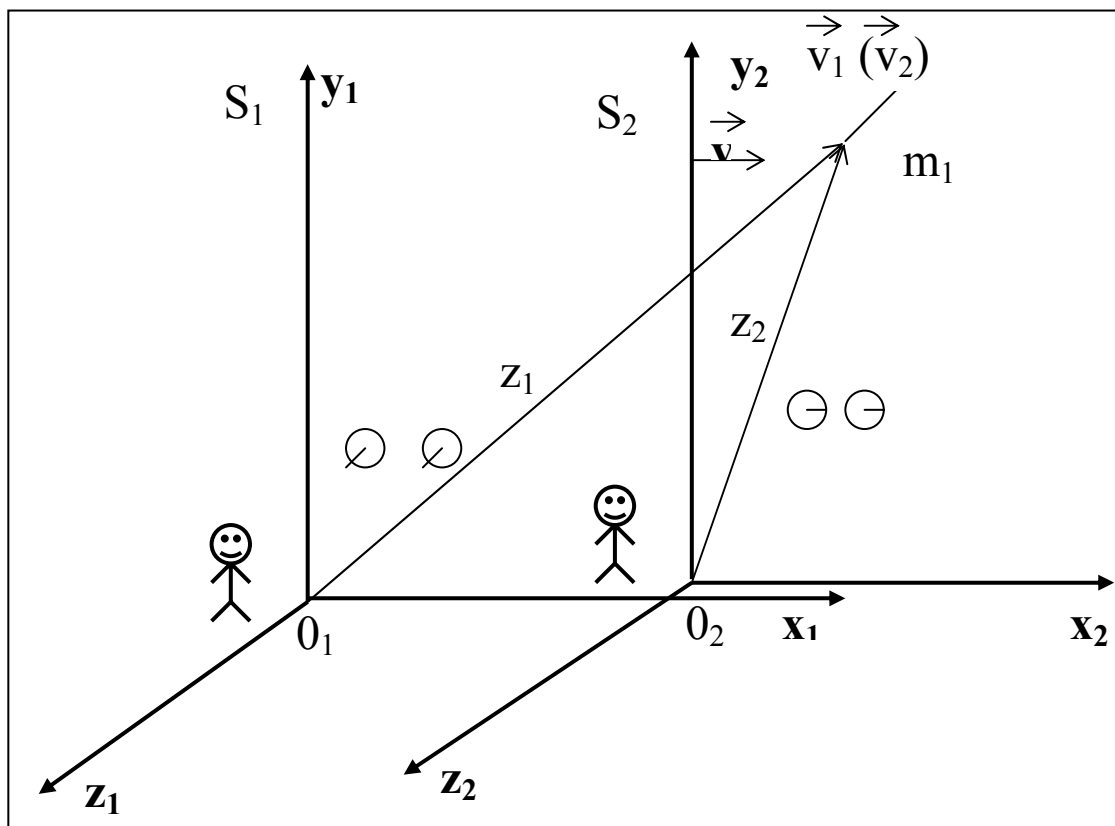


MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

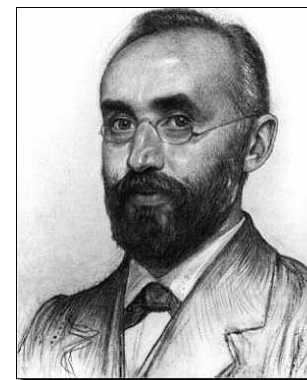
MECHANIKA RELATYWISTYCZNA (SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI)

TRANSFORMACJA LORENTZA WSPÓLRZĘDNYCH CZĄSTKI (1903r.)

Rys.10.



Układy S_1 i S_2 są inercyjnymi układami odniesienia



Hendrik Antoon Lorentz
(1853-1928)

- Prędkość względna układów $v = \text{const}$
- $v \approx c$, gdzie $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ nie zależy od układu odniesienia ($c = \text{const}$).

Podstawowe założenie STW, sformułowane na podstawie wyniku doświadczenia Michelsona – Moreleya z 1887 roku.

- masa, prędkość i położenie cząstki
w układzie S_1 : $m_1, \vec{v}_1, \vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$
w układzie S_2 : $m_2, \vec{v}_2, \vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$
- Założenie: $t_1 = t_2 = 0$, gdy $O_1 = O_2$, początki układów pokrywają się.

Transformacja współrzędnych cząstki

Definicja czynnika beta (β) i gamma (γ)

Lorentza:

$$\beta = \frac{v}{c} \leq 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x_1 - vt_1)$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t_1 - \frac{\beta}{c}x_1)$$

Transformacja odwrotna:

$$1 \rightarrow 2, v \rightarrow -v$$

$$x_1 = \frac{x_2 + vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x_2 + vt_2)$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$t_1 = \frac{t_2 + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t_2 + \frac{\beta}{c}x_2)$$

ZASADA KORESPONDENCJI BOHRA (1923r.)

Prawa i sformułowania dotyczące nowych odkryć nie mogą być sprzeczne z prawami fizyki klasycznej. Wzory transformacji Lorentza przechodzą we wzory transformacji Galileusza.

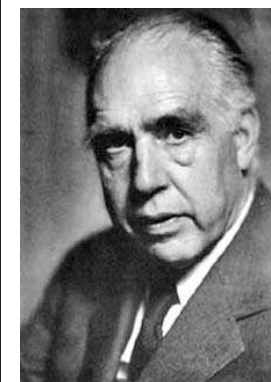
$$\beta = v/c \rightarrow 0 (v \ll c)$$

$$x_2 = x_1 - vt_1$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = t_1$$



Niels H.D. Bohr
(1885 – 1962)

TRANSFORMACJA LORENTZA PRĘDKOŚCI CZĄSTKI

- Dla nieskończenie małych przyrostów x i t możemy napisać

$$dx_2 = \gamma(dx_1 - v dt_1) = \gamma(u_{1x} - v)dt_1$$

$$dy_2 = dy_1$$

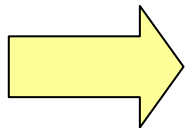
$$dz_2 = dz_1$$

$$dt_2 = \gamma(dt_1 - \frac{\beta}{c} dx_1) = \gamma(1 - v u_{1x} / c^2) dt_1$$

Gdzie $u_{1x} = \frac{dx_1}{dt_1}$, $u_{2x} = \frac{dx_2}{dt_2}$ itd. oznaczają odpowiednie składowe prędkości cząstki w układzie S_1 i S_2

Transformacja prędkości cząstki ma postać:

$$u_{2x} = \frac{u_{1x} - v}{1 - \frac{\beta}{c} u_{1x}}$$
$$u_{2y} = \frac{u_{1y} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} u_{1x}}$$
$$u_{2z} = \frac{u_{1z} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} u_{1x}}$$



Gdy $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$

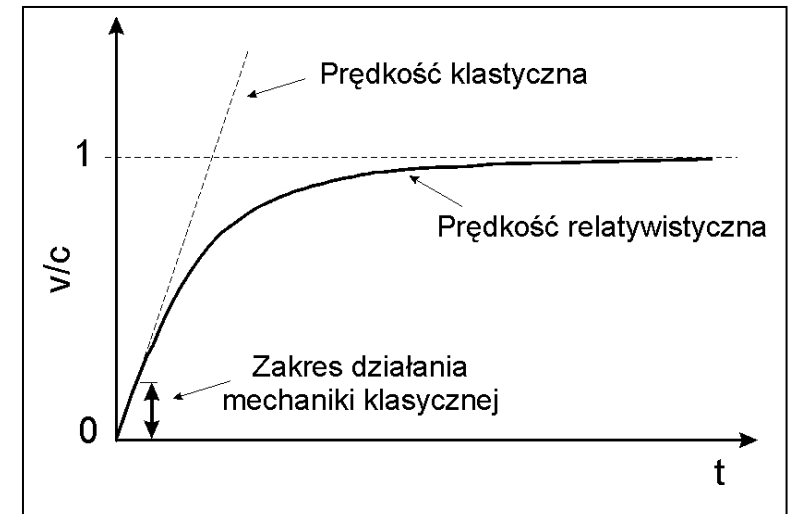
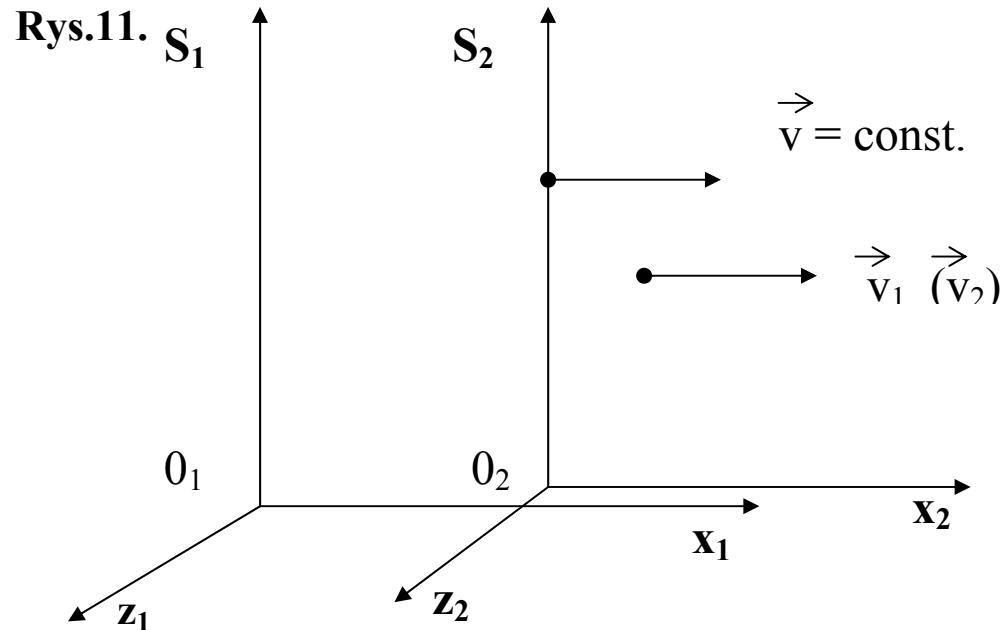
wzory **transformacji Lorentza** przechodzą
we wzory **transformacji Galileusza**

$$u_{2x} = u_{1x} - v$$

$$u_{2y} = u_{1y}$$

$$u_{2z} = u_{1z}$$

SKŁADANIE PRĘDKOŚCI, przykład



- Prędkość względna układów v i prędkość cząstki w układzie S_2 są równe prędkości światła oraz cząstka porusza się w kierunku osi x .

$$u_{2x} = u_2 = v = c, u_{2y} = u_{2z} = 0$$

$$u_{1x} = \frac{u_2 + v}{1 + \frac{\beta}{c} u_2}, u_{1y} = u_{1z} = 0$$

$$u_2 = v = c$$

$$u_{1x} = \frac{c + c}{1 + 1} = c$$

Złożenie dwóch prędkości światła daje w wyniku prędkość światła. Spełnione jest podstawowe założenie szczególnej teorii względności, że **wartość prędkości światła nie zależy od układu odniesienia i jest maksymalną prędkością w przyrodzie.**

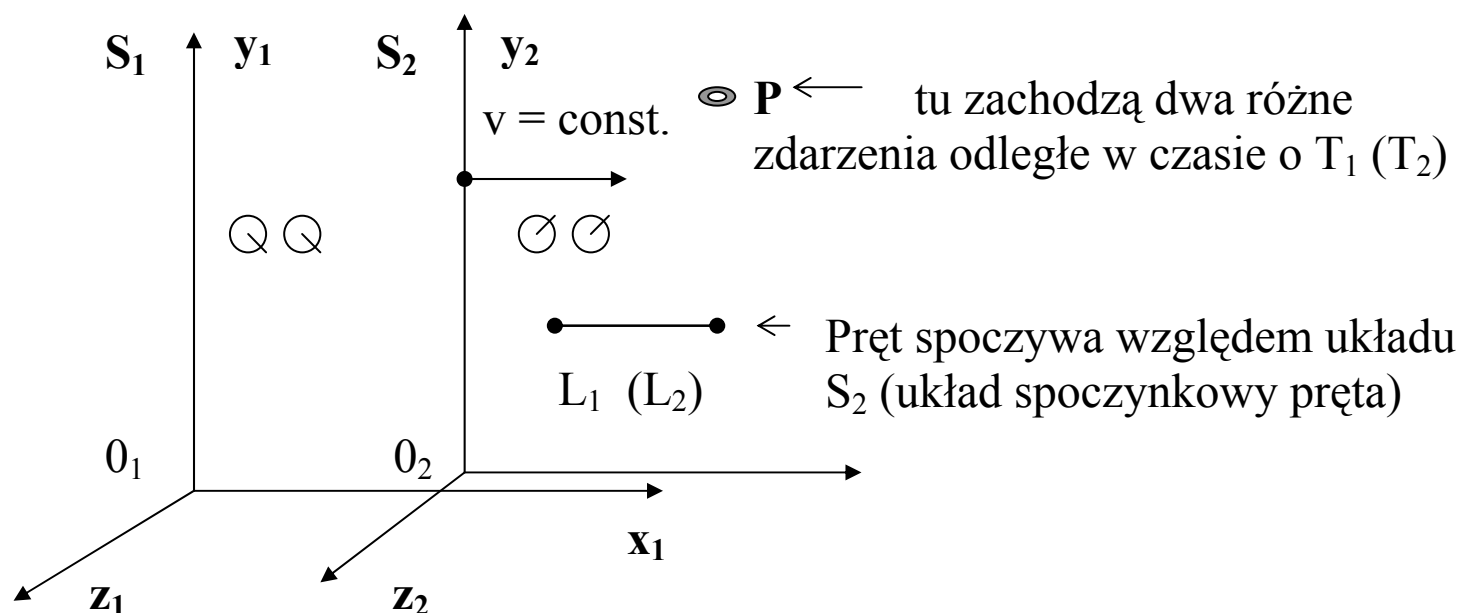
KONSEKWENCJE TRANSFORMACJI LORENTZA

- 1) Skrócenie długości
- 2) Wydłużenie przedziałów czasowych
- 3) Masa cząstki relatywistycznej
- 4) Energia cząstki relatywistycznej

DŁUGOŚĆ = odległość dwóch punktów w przestrzeni mierzona w tej samej chwili czasu

PRZEDZIAŁ CZASU = czas oddzielający dwa kolejne zdarzenia zachodzące w tym samym punkcie przestrzeni

Rys.12.



• TRANSFORMACJA LORENTZA DŁUGOŚCI

- Pręt spoczywa względem układu S_2
- S_2 = **układ spoczynkowy pręta (cząstki, ciała), tzw. własny układ odniesienia**
- S_1 = **układ laboratoryjny**, spoczywający względem Ziemi uważanej za inercjalny układ odniesienia
- L_1 = mierzona długość pręta, gdy znajduje się on w ruchu względem obserwatora,
- L_2 – długość, gdy pręt względem obserwatora spoczywa, $L_2 = \text{const}$, tzw. **długość własna pręta**

$$L_1 = \sqrt{1 - \beta^2} L_2$$

$$L_1 < L_2$$

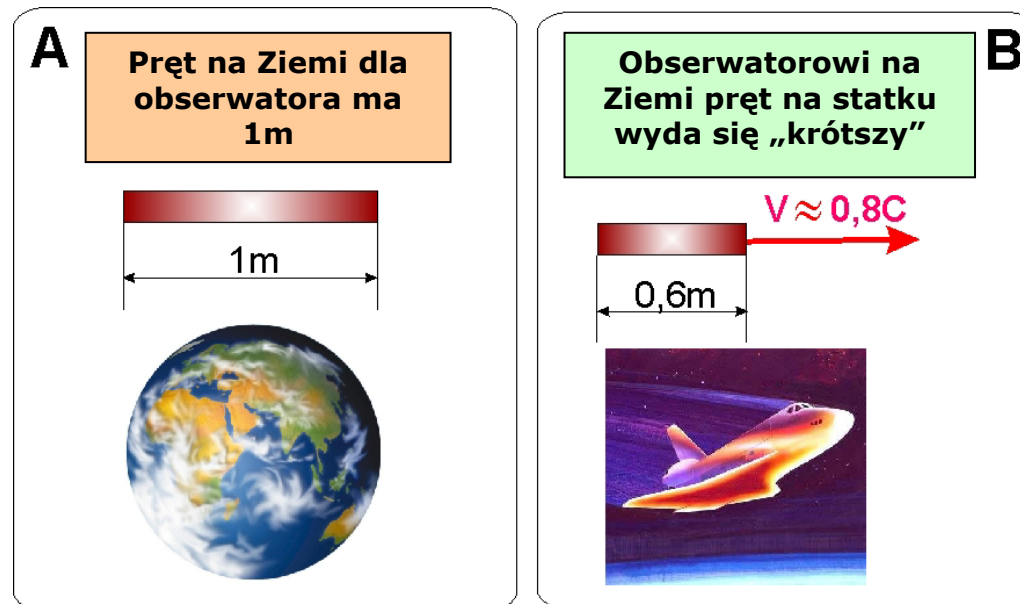
Skrócenie długości w układzie laboratoryjnym

Inaczej

$$L_2 = \gamma L_1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$L_2 > L_1$$



- **TRANSFORMACJA LORENTZA PRZEDZIAŁU CZASU**

- W punkcie przestrzeni P zachodzą dwa różne zdarzenia odległe w czasie o T_1 (w układzie S_1) lub T_2 (mierzone w układzie S_2)
- T_1 = przedział czasu mierzony przez obserwatora w układzie laboratoryjnym S_1 ,
- T_2 = przedział czasu mierzony w układzie S_2

$$T_1 = \gamma T_2$$

$$\gamma > 1$$

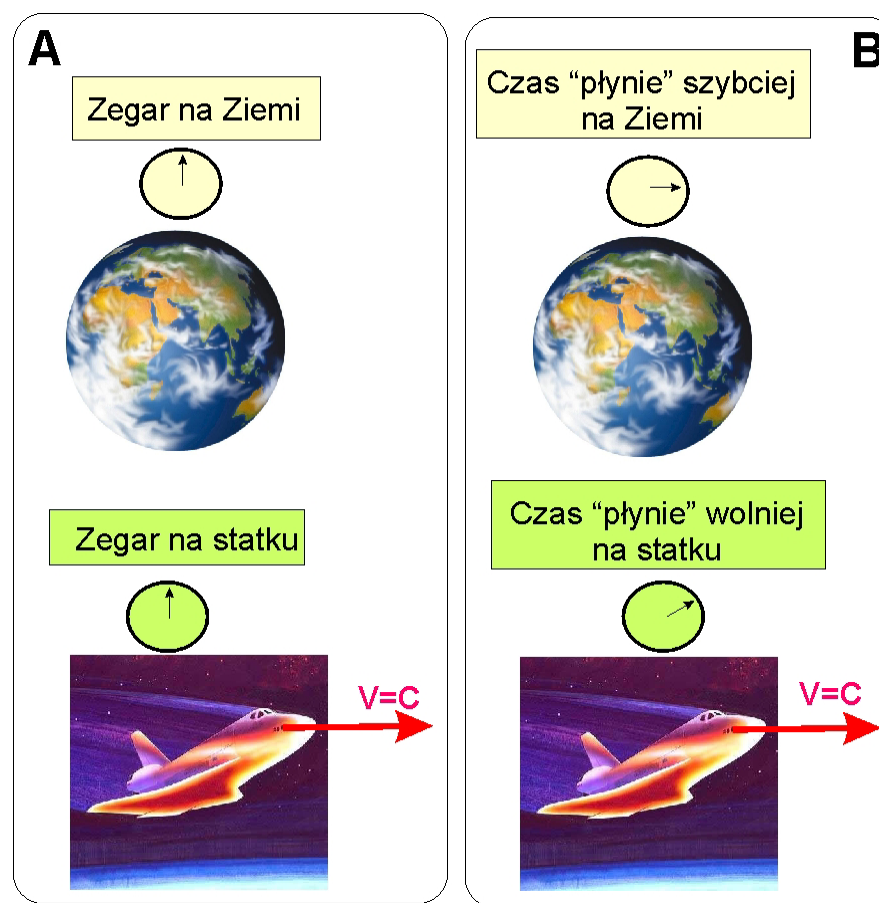
$$T_1 > T_2$$

**Wydlużenie przedziału czasu
w układzie laboratoryjnym**

Inaczej

$$T_2 = \sqrt{1 - \beta^2} T_1$$

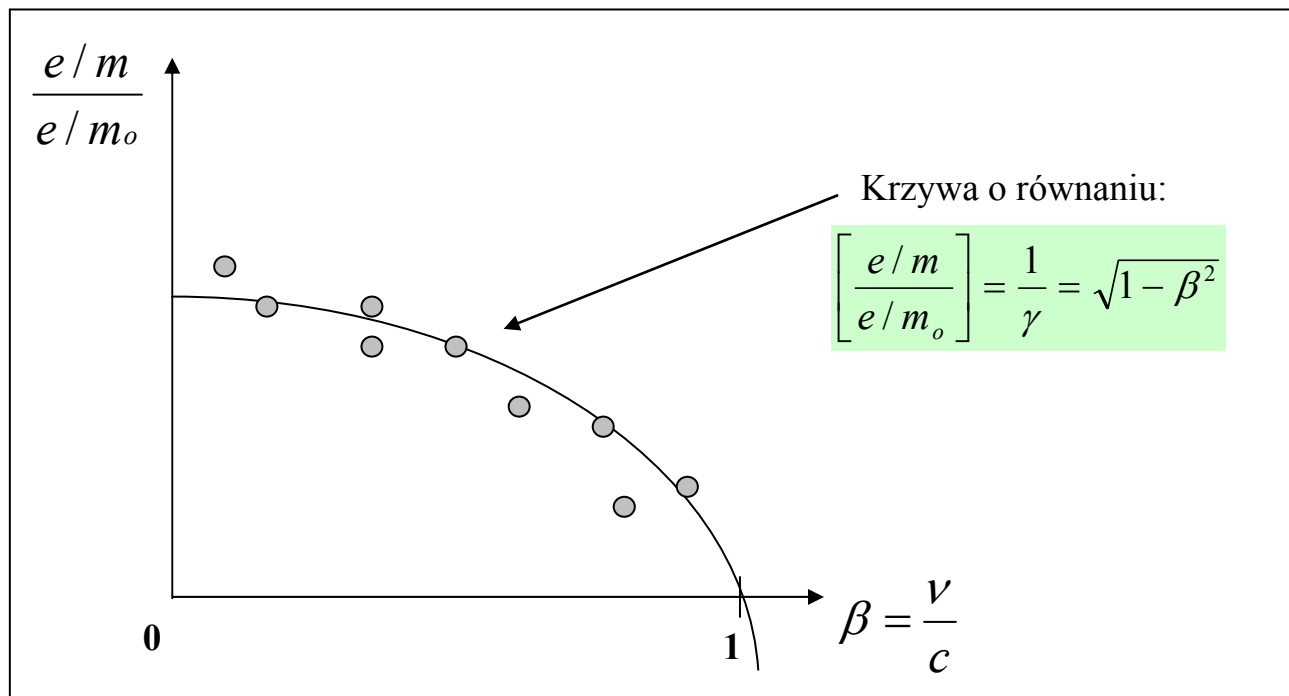
**Poruszające się zegary
chodzą wolniej
niż zegary spoczywające.**



- **MASA CZĄSTKI RELATYWITYCZNEJ (1908r.)**

- Doświadczenie z 1908 r: badanie zależności masy elektronu od jego prędkości
- $S_1 = \text{Laboratorium}$, $S_2 = \text{Układ Spoczynkowy Elektronu}$
- Zmiana oznaczeń: wielkości wyznaczone w laboratorium są zapisywane bez indeksów dolnych, wielkości w układzie spoczynkowym (własnym) posiadają dolny indeks „0”

Rys. 13.



e/m - stosunek ładunku elektronu do jego masy

e - nie zależy od układu odniesienia

m - masa elektronu przy prędkości różnej od zera

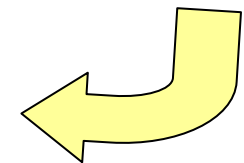
m_0 - masa spoczynkowa elektronu ($v=0$)

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Zależność stosunku $\left[\frac{e/m}{e/m_0} \right]$ najlepiej opisuje krzywa o równaniu: $\left[\frac{e/m}{e/m_0} \right] = \frac{1}{\gamma}$

Wynika stąd zależność masy cząstki od jej prędkości $m = \gamma m_0$



- **ENERGIA CZĄSTKI RELATYWISTYCZNEJ**

- Spełnione równanie ruchu (II zasada dynamiki Newtona) $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
- Obowiązuje definicja pędu cząstki taka jak w fizyce klasycznej $\vec{p} = m(\vec{v})\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$ $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$
 $\beta = v / c$
- Energia kinetyczna cząstki jest równa pracy wykonanej nad cząstką przez siłę $\vec{F}$, podczas przemieszczenia jej z punktu A do punktu B. Założenie: w chwili $t = 0$, $v = 0$

$$E_k = PRACA = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Przy małych prędkościach cząstki, $v \ll c$, wzór na energię kinetyczną ma postać: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- Przy prędkościach cząstki porównywalnych z prędkością światła $v \approx c$ wzór na energię kinetyczną ma

zupełnie inną postać: $E_k = mc^2 - m_0c^2 = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right]$

- Z definicji: $m_0c^2 = E_0$ nosi nazwę **energii spoczynkowej**,
- $mc^2 = E$ - **energia całkowita cząstki relatywistycznej**

$E \equiv mc^2 = E_k + m_0c^2$ - **wzór Einsteina na równoważność masy i energii**. Inaczej $m = \frac{E}{c^2}$

- ZMIANA ENERGII CAŁKOWITEJ $\Rightarrow$ ZMIANA MASY BEZWŁADNEJ

$$(\Delta M)C^2 = \Delta E$$

Energia całkowita inaczej

$$p = m_0 \gamma v$$

$$p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = E^2$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$$

$$E_0 \equiv m_0 c^2$$

- CZĄSTKI O ZEROWEJ MASIE SPOCZYNKOWEJ = CZĄSTKI SKRAJNIE RELATYWISTYCZNE

- Energia (masa) spoczynkowa cząstki jest dużo mniejsza od energii całkowitej $E_0 \ll E$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2}$$

$$m = \frac{E}{c^2}$$

$$p = \frac{E}{c}$$

$$p = mv = \frac{E}{c^2} \cdot v$$

$$\frac{E}{c} = \frac{E}{c^2} \cdot v$$

$$v = c$$

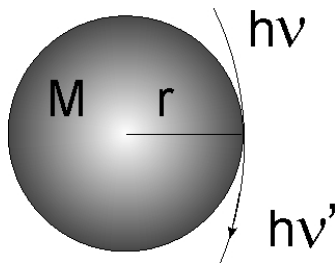
Cząstki o **zerowej masie spoczynkowej** (fotony, neutrina) **poruszają się z prędkością** równą prędkości światła.

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}$$

ODDZIAŁYWANIE GRAWITACYJNE FOTONÓW (KWANTÓW γ) I NEUTRIN (ν)

- Z obserwacji astrofizycznych wiadomo, że foton (neutrino) przebiegając w pobliżu gwiazdy zakrzywia swój tor. Zakrzywienie to, w przypadku fotonu, wynika z oddziaływania grawitacyjnego fotonu („cząstki bezmasowej”) z gwiazdą, czego następstwem jest zmiana jego częstości.

Rys. 14.



$$E = mc^2 = h\nu$$

- Masa fotonu $m = \frac{h\nu}{c^2}$

- Energia całkowita fotonu oddziałującego z polem grawitacyjnym

$$E' = h\nu' = h\nu + E(r)$$

$$E(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMh\nu}{rc^2}$$

$$\frac{h\nu' - h\nu}{h\nu} = -\frac{GM}{rc^2}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{rc^2}, \Delta\nu = \nu - \nu'$$

np. gdy Gwiazdą jest Słońce, otrzymujemy $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{7 \cdot 10^8 \cdot (3 \cdot 10^8)^2} \approx 2 \cdot 10^{-6}$

Jest to obserwowane tzw. **przesunięcie częstości fotonów ku czerwieni** (zmniejszenie częstości fotonów).

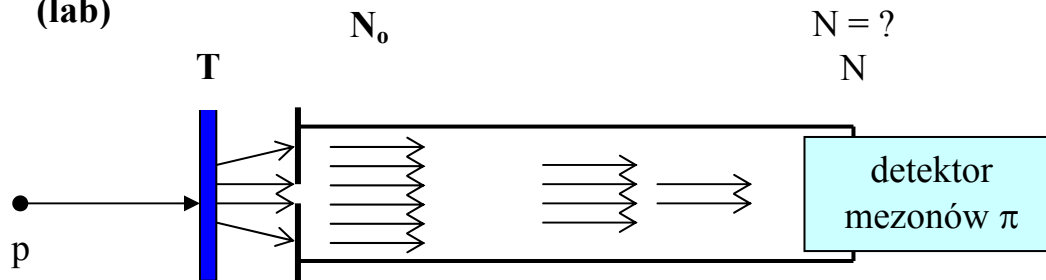
RÓWNOWAŻNOŚĆ INERCJALNYCH UKŁADÓW ODNIESIENIA

Doświadczenie z rozpraszaniem protonów na jądrach atomów (na jądrach tarczy, np. na protonach)

- długość odcinków wydaje się skrócona, a zegary wydają się chodzić szybciej

Rys. 15.

układ S_1
(lab)



$l_1 = 100 \text{ m}$

- S_1 = układ laboratoryjny,
- S_2 = układ własny cząstek (mezonów π)

$p + \text{jądro } T \rightarrow \text{mezony } \pi$

(p = proton, T = tarcza)

$l_1 = 100 \text{ m}$

- Mezony π są nietrwałe, ulegają rozpadowi

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$$

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

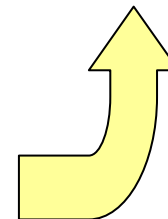
- $\tau = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, średni czas życia pionu w jego układzie własnym S_2
- $E_0 = 100 \text{ MeV}$ energia (masa) spoczynkowa pionu

Zał.: $\gamma = 20$

Energia kinetyczna wynosi:

$$E_k = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = E_0 (\gamma - 1)$$

$$E_k \approx \gamma E_0 = 20 \cdot 100 \text{ MeV} = 2 \text{ GeV}$$



UKŁAD LABORATORYJNY S_1

- Rozważania klasyczne

$$N = ?$$

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = \frac{100m}{3 \cdot 10^8 m/s} \approx 3.3 \cdot 10^{-7} s$$

$$N = N_0 \exp\left[-\frac{3.3 \cdot 10^{-7}}{2.6 \cdot 10^{-8}}\right] = 2.8 \cdot 10^{-6} N_0$$

$$N / N_0 \cdot 100\% = 2.8 \cdot 10^{-4}\%$$

Tylko 3 mezony na 10 000 dotrą do detektora !

- Rozważania relatywistyczne, z uwzględnieniem spowolnienia zegara pionu

$$\tau_1 = \gamma \tau = 20 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} s = 5.2 \cdot 10^{-7} s$$

$$N = N_0 \exp\left[-\frac{3.3 \cdot 10^{-7}}{5.2 \cdot 10^{-7}}\right] = 0.52 N_0$$

$$N / N_0 = 52\%$$

Ponad połowa mezonów dotrze do detektora!

UKŁAD WŁASNY MEZONU π , S_2

- Obserwator poruszający się z mezonami $\Leftrightarrow$ laboratorium z punktu widzenia lecących mezonów
 $\tau = 2.6 \cdot 10^{-8} s$, zegar pionu chodzi normalnie

$$l_2 = \frac{l_1}{\gamma} = \frac{100m}{20} = 5m$$

$$t = \frac{5m}{3 \cdot 10^8 m/s} = 1.7 \cdot 10^{-8} s$$

$$N = N_0 \exp\left[-\frac{1.7 \cdot 10^{-8}}{2.6 \cdot 10^{-8}}\right] \approx 0.52 N_0$$

$$N / N_0 = 52\%$$

Tyle samo mezonów dotrze do detektora w układzie własnym, zanim ulegnie rozpadowi, co i w układzie laboratoryjnym!

$$\left[\frac{N}{N_0}\right]_{\text{LABORATORIUM}(S_1)} = \left[\frac{N}{N_0}\right]_{\text{SPOCZYNKOWY}\pi(S_2)}$$

układ laboratoryjny $\Leftrightarrow$ układ mezonu π